

# TASSELLAZIONI DEL PIANO

Ambiti disciplinari: Geometria; Grandezze e misure.



Comprendere il concetto di tassellazione.  
Esplorare le caratteristiche dei poligoni.



Figure del piano in generale; trasformazioni geometriche;  
ampiezze degli angoli dei poligoni; area in generale.

Questa pratica didattica presenta attività concernenti la tassellazione del piano a partire dalla comprensione delle sue caratteristiche. Inizialmente si gioca in modo libero con tanti tasselli di varie forme, per poi arrivare ad attività più complesse in un crescendo di difficoltà e a riflessioni sempre più approfondite che toccano i temi delle ampiezze degli angoli e delle trasformazioni geometriche. Di alcune attività vengono proposte varianti per i diversi cicli, per poter essere svolte con allievi di diverse competenze.

Attraverso proposte narrative e ludiche sul tema della tassellazione, i bambini avranno anche modo di consolidare le loro conoscenze sulle fi-

gure del piano e di affrontare il concetto di angolo e di ampiezza. I diversi modi di ricoprire il piano con figure, senza sovrapporle e senza lasciare parti di piano vuote, rappresentano attività ideali anche per approcciare temi legati alla misura, essendo propedeutici al concetto di area. Questa pratica didattica è legata a "Composizioni e scomposizioni di figure", "Divertiamoci con le figure del piano" e "Poligoni nel secondo ciclo".

Per implementare le attività qui descritte si suggerisce l'utilizzo del supporto "Figure che tassellano e che non tassellano" dove vengono forniti esempi di tasselli da stampare, ritagliare e consegnare ai bambini.



## **Liberi accostamenti**

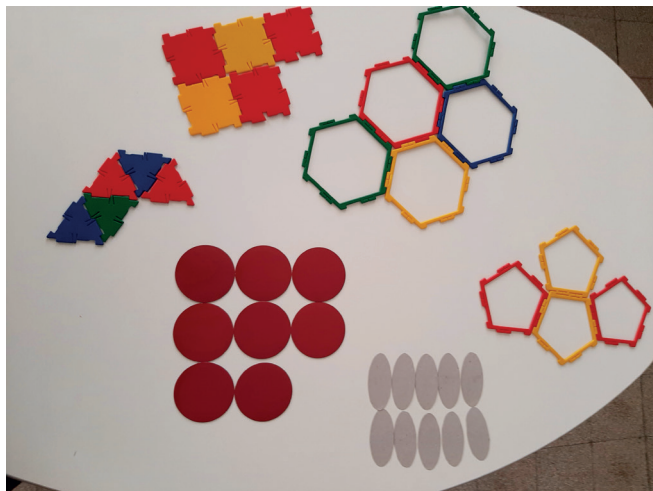
Fin dai primi anni di scuola elementare si possono proporre delle attività di libera esplorazione sul tema della tassellazione chiedendo di accostare figure di vari tipi. Si mettono a disposizione degli allievi diversi tasselli, non solo poligoni (quadrati, rettangoli, triangoli, pentagoni, esagoni, ottagoni, stelle ecc.), ma anche figure con i contorni curvilinei o misti (cerchi, ellissi, cuori

ecc.) in grande quantità. Le tessere a disposizione possono essere in cartoncino o in plastica, sufficientemente grandi per poter essere maneggiate con facilità. Si chiede poi di accostare i tasselli in modo da "ricoprire" una porzione di tavolo.

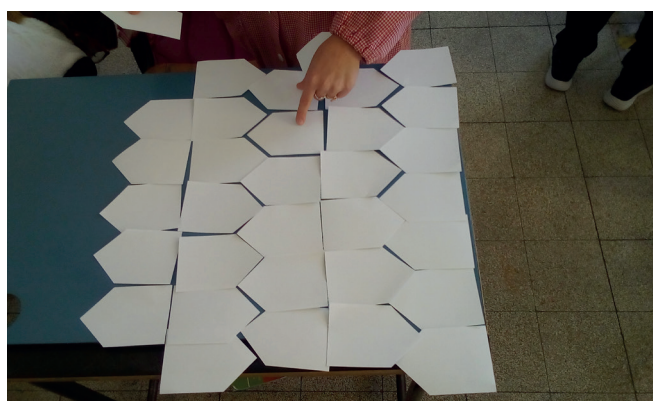
Dopo una prima esplorazione libera si può fornire il primo vincolo: non sovrapporre i tasselli. Gli allievi possono lavorare in piccoli gruppi o



a coppie, prima utilizzando tanti tasselli di forme diverse, poi provando a usare un solo tipo di tasselli. In un secondo momento si può dare il secondo vincolo: cercare di avere meno parti di piano vuote possibili.



Si possono poi proporre delle sfide: *“Quali tasselli conviene usare per lasciare il minor numero di “buchi” possibili?”*, *“Usando solo un solo tipo di figura è sempre possibile ricoprire il tavolo senza lasciare parti di piano vuote? Con quali figure si può fare? E con quali non si riesce? Come devono essere posizionati i tasselli?”*. Gli allievi potranno così scoprire che alcune figure permettono di ricoprire il piano senza sovrapposizioni e senza lasciare “buchi”, ossia parti di piano vuote (ad esempio i triangoli, i quadrati, i rettangoli, i rombi, i parallelogrammi, gli esagoni regolari, ...), mentre altre no (ad esempio i pentagoni regolari, i cerchi, i cuori, le stelle, ...).



Le scoperte fatte possono essere istituzionalizzate in un cartellone suddividendo le figure in due famiglie, quelle che permettono di effettuare una tassellazione, utilizzando sempre la stessa forma, e quelle che non la permettono. È interessante far notare agli allievi più grandi che non è sufficiente che la figura sia un poligono per poter tassellare, e neppure che sia un poli-

gono regolare. Infatti, è possibile verificare che né la stella né il pentagono regolare permettono di tassellare. Per un approfondimento, si può consultare il blog [“Divertiamoci con l'area. Prima parte: Le tassellazioni del piano”](#).

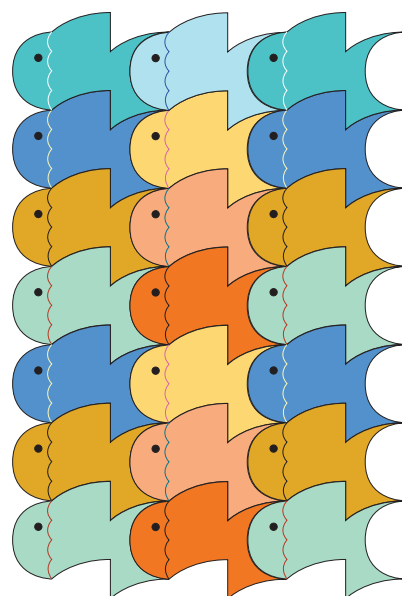
Figure che tassellano		Figure che non tassellano	
	quadrato		cuore
	rettangolo		stella
	trapezio		pentagono
	rombo		cerchio
	triangolo		
	esagono		



### Albi per tassellare

Dopo aver riflettuto sulle figure che tassellano con le prime attività libere si possono proporre delle attività creative da introdurre o accompagnare con la lettura di albi illustrati adatti al tema. Ad esempio, l'albo illustrato *“Pezzettino”* di Leo Lionni (1975) offre lo stimolo per parlare di composizioni e scomposizioni di figure piane. Pezzettino, infatti, è un piccolo quadratino che crede di essere parte di un altro personaggio più grande composto dall'accostamento di tanti quadratini colorati, per poi scoprire che anche lui è formato da tanti piccoli pezzi.

Altri albi che possono favorire il lavoro di tassellazione sono *“Guizzino”* di Lionni (1963) in cui dei piccoli pesci si uniscono in una sorta di grande tassellazione a forma di grande pesce. Questa tassellazione proposta nell'albo non è precisa, infatti rimangono parti di piano vuote, ma è possibile riprodurla ad esempio con i pesci presentati nel supporto *“Figure che tassellano e che non tassellano”*.





Anche i numerosi albi dell'elefantino Elmer, come "Elmer l'elefante variopinto" di McKee (1990), presentano tassellazioni multicolori che possono essere riprodotte e modificate, creando nuovi "vestiti" per il nostro personaggio o per i bambini a Carnevale.



Immagine tratta dal quaderno didattico "È tutto un tassello!"



### Personaggi a pezzetti

Ispirati dalla lettura degli albi è possibile chiedere agli allievi di realizzare dei personaggi e di inventare delle storie legate al tema della tassellazione. Si può proporre di realizzare i personaggi attraverso la giustapposizione di tasselli della stessa forma e dimensione. Inizialmente si possono utilizzare tasselli quadrati (come i personaggi di "Pezzettino") per poi proporre figure diverse (triangoli, rettangoli, rombi ecc.). Ogni bambino presenta poi alla classe la propria creazione. In una prima fase dell'attività, soprattutto con gli allievi del primo ciclo, la disposizione dei pezzi potrà essere lasciata libera: le figure potrebbero quindi anche risultare parzialmente sovrapposte o presentare delle parti di piano vuote. Successivamente si può chiedere di prestare maggiore attenzione a come vengono accostati i pezzi, facendo in modo che i lati delle varie figure coincidano, come avviene per i personaggi dei racconti. I personaggi potranno poi prendere vita attraverso la fantasia dei bambini e diventare protagonisti di una storia, che potrà essere inventata a grande gruppo e illustrata tramite le creazioni dei bambini. Sarà interessante sfruttare nella storia il fatto che i personaggi sono composti da pezzi tutti congruenti tra loro.

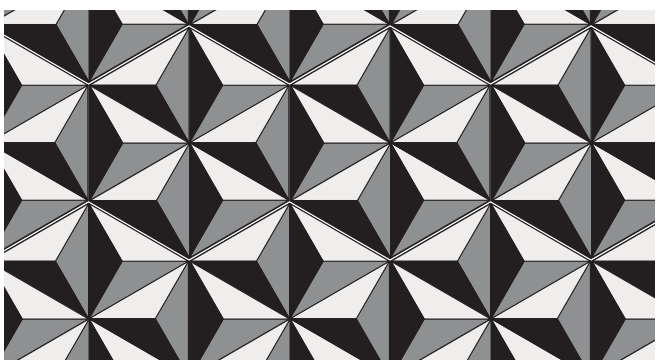
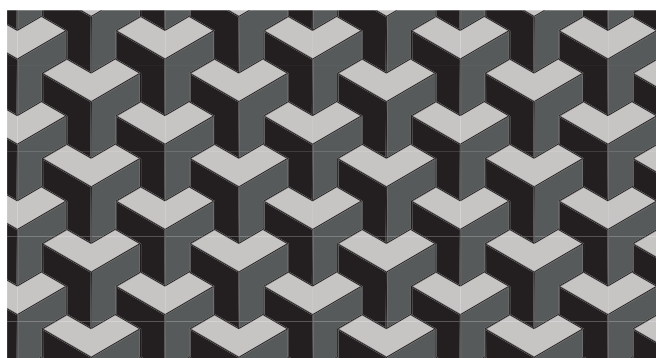






### Tassellazioni intorno a noi

In analogia a quanto illustrato nelle pratiche didattiche “Figure nel mondo reale”, “Alla scoperta dei poligoni” e “Poligoni nel secondo ciclo” si può proporre agli allievi una “caccia alle tassellazioni”, con particolare attenzione alle figure che le compongono e alla loro disposizione. Osservando pavimentazioni, soffitti e facciate dei palazzi gli allievi si accorgono che sono molto diffuse intorno a noi, e che a volte alcune sono artisticamente molto belle, mentre altre sono delle vere e proprie illusioni ottiche. Si considerino ad esempio i pavimenti della Certosa di Calci (Pisa) (riprodotti nelle immagini di seguito) che, nonostante siano ottenuti da una tassellazione piana usando un unico poligono, sembrano formare una struttura in bassorilievo, grazie alle diverse gradualità di colori e alla loro disposizione. Una vera e propria illusione ottica creata da un particolare accostamento di poligoni e da un'efficace colorazione in chiaro-scuro.



Il docente o gli allievi stessi possono fotografare ciò che vedono intorno a loro, stampare le fotografie e riprodurre le figure che compongono la tassellazione, ripassandone i contorni.

Dopodiché possono ritagliare le varie figure ottenendo i tasselli per riprodurre la pavimentazione che è stata fotografata. Le fotografie poi possono essere appese in aula, così da creare un'esposizione delle immagini raccolte.

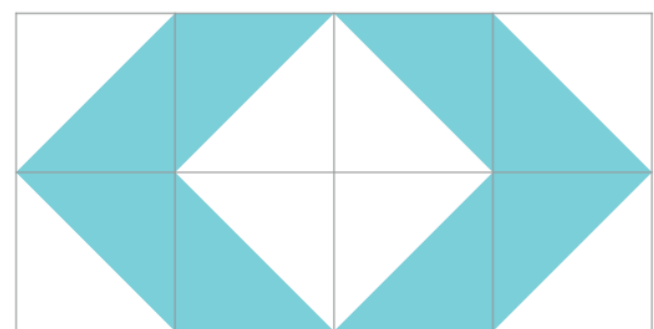
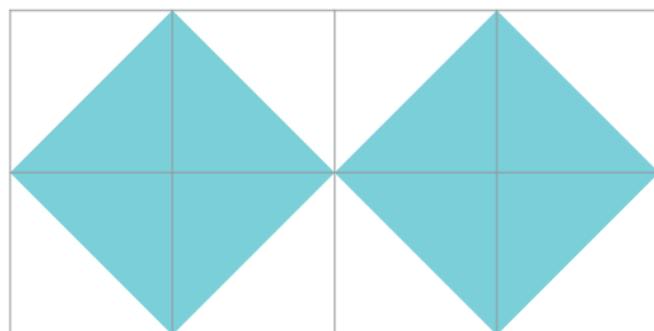


### Tasselli per decorazioni

Le attività sulla tassellazione si prestano per sviluppare disegni geometrici derivanti dall'accostamento dei tasselli colorati, un po' come succede in un mosaico. Una possibile attività consiste nel fornire agli allievi una certa quantità di tasselli quadrati, che i bambini conoscono come figura che tassella grazie alle attività precedenti, ma non in tinta unita, bensì con un semplice motivo che permette di essere assemblato in molteplici modi. Ad esempio, suddividere il quadrato tramite la diagonale e colorare i due triangoli di due colori diversi, come mostrato nell'immagine.

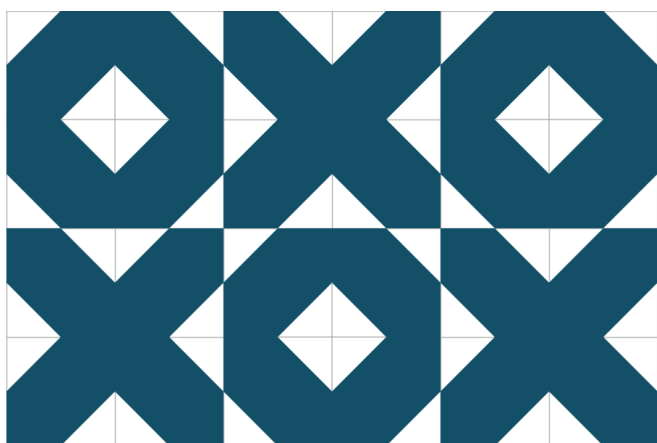


Si chiede poi agli allievi di assemblare i tasselli dapprima in modo libero e in seguito cercando di riprodurre una decorazione che si ripete in modo strutturato, come avviene per i seguenti esempi. Si può così allenare la ricorsività dei moduli in una sorta di successione.



È interessante far notare agli allievi le svariate decorazioni che possono essere create a partire da un solo tipo di semplice tassello.

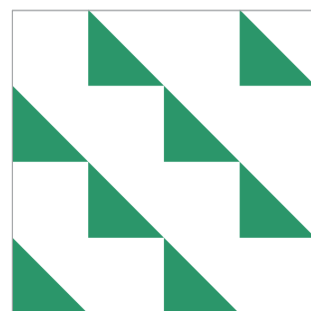
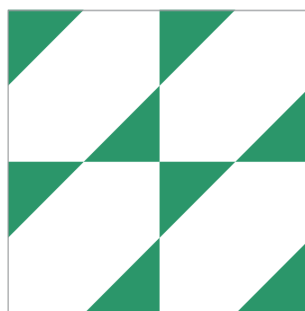
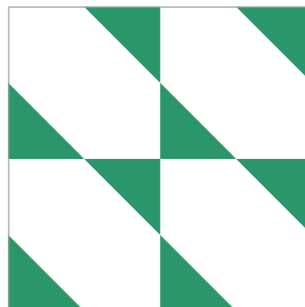
Un'altra attività che si può proporre lavorando con tasselli di questo tipo consiste nel mostrare una decorazione agli allievi chiedendo di riconoscere il tassello da cui è stata generata. I bambini potrebbero costruire il tassello per poi ruotarlo e percorrere la decorazione in modo da rispettare il motivo del disegno verificando così la propria risposta. In questo modo si può far anche osservare la trasformazione geometrica che si sta applicando al tassello, ossia la rotazione o traslazione, e con i più grandi eventualmente si può discutere su quale sia l'angolo di rotazione che è necessario considerare per poter realizzare la decorazione.



L'attività può continuare chiedendo agli allievi di proporre un tassello diverso e di sbizzarrirsi in nuove configurazioni artistiche o di sfidare il proprio compagno a creare il maggior numero di decorazioni con il tassello a disposizione.

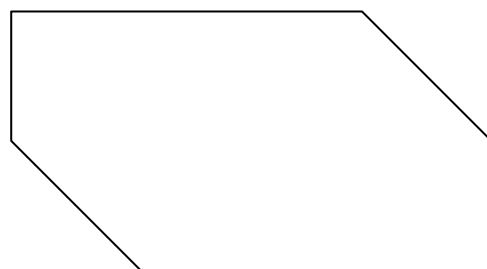
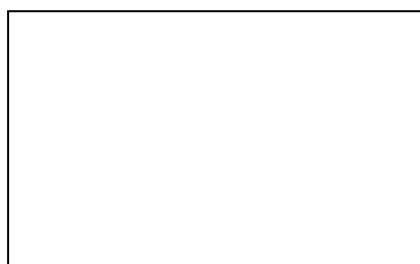
Un'ulteriore attività da proporre con i tasselli colorati consiste nel riconoscere l'intruso all'interno di un insieme di configurazioni ottenute a partire da un particolare tassello ripetuto un certo numero di volte, ad esempio quattro. Ad esempio, si

potrebbe chiedere: "Quale delle seguenti decorazioni NON può essere ottenuta utilizzando esclusivamente questo tassello?".

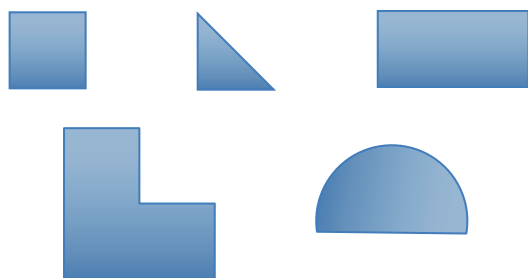


### Il laboratorio del piastrellista

Sulla scia dell'osservazione di pavimentazioni reali si può chiedere agli allievi di immedesimarsi in veri e propri piastrellisti che devono pavimentare le stanze di una casa. Si possono proporre stanze di forme diverse, come quelle proposte di seguito:



Dopo aver fornito particolari tasselli, come quelli seguenti, si sfidano gli allievi a ricoprire i pavimenti delle stanze senza creare sovrapposizioni, senza lasciare parti di piano vuote e rimanendo nei contorni delle stanze senza tagliare le piastrelle. Si può dunque chiedere: *“Quali piastrelle sono adatte per soddisfare tutti questi vincoli?”*, *“Quali piastrelle sono adatte per soddisfare tutti i vincoli tranne quello di non tagliare le piastrelle nei contorni?”*. Dopo aver proposto delle tessere in grande numero, gli allievi sperimentando provano a risolvere la richiesta ricoprendo le piantine.



Si consiglia di continuare il lavoro sulla scheda *“Quale forma pavimenta?”*.

Finita l'attività si ragiona sul fatto che nella realtà i pavimentisti tagliano le piastrelle nei contorni della stanza, perché è veramente difficile trovare delle piastrelle che tassellano perfettamente una figura piana. Si possono poi osservare vari pavimenti reali.

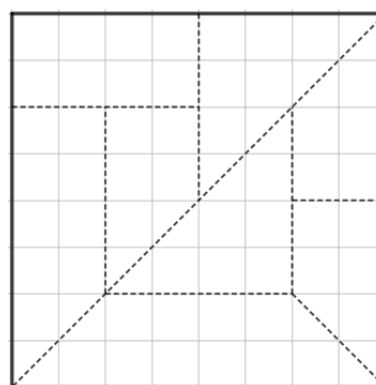
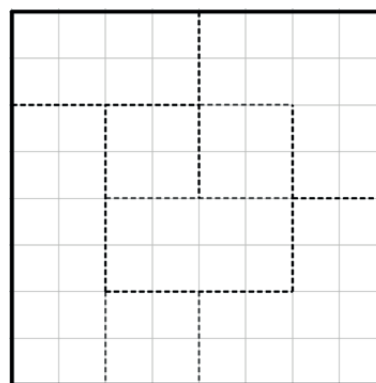
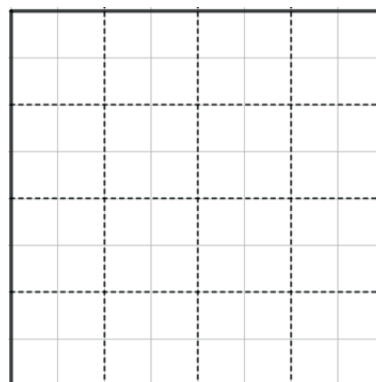


### Scomponiamo figure

Questa proposta si basa su varianti di classici giochi come puzzle o tangram in cui viene chiesto di ricostruire una figura scomposta in vari pezzi, giocando su accostamenti opportuni. Questi contesti giocosi si prestano bene per lavorare sulla tassellazione in quanto il fatto che i pezzi non si debbano sovrapporre o non debbano lasciare parti di piano vuote è insito nelle regole del gioco stesso.

I puzzle possono essere creati direttamente dagli allievi stessi: ognuno disegna una figura su una griglia a piacere (quadrata, rettangolare, triangolare, isometrica ecc.) e poi traccia al suo interno delle suddivisioni (segmenti o linee curve) in modo da individuare dei pezzi che la formano. Di questa immagine si fa una fotocopia, una fotografia o si riproduce in duplice copia. Si chiede poi ad ogni allievo di tagliare i pezzi di una di queste figure, così da creare i pezzi di un puzzle. In seguito, gli allievi mescolano i pezzi del puzzle e provano a ricomporre l'immagine di partenza incastrandoli opportunamente, avendo a disposizione eventual-

mente l'immagine originale per poterla confrontare con la riproduzione. I bambini si possono poi scambiare i puzzle e sfidarsi nella loro ricostruzione. Il docente avrà cura di guidare gli allievi nella scelta dei pezzi in modo che non siano né troppo piccoli né troppo complessi, almeno inizialmente, per poi aumentare gradualmente la complessità. Di seguito si riportano alcuni esempi ottenuti partendo da quadrati.



Lo stesso si può fare con il tangram o, per gli allievi del secondo ciclo, con lo *stomachion*, suddivisione più complessa del quadrato iniziale in cui i pezzi sono 11 triangoli diversi tra loro, due quadrilateri e un pentagono.

Questi giochi di scomposizione si prestano per creare anche altre figure, oltre al quadrato, che avranno sicuramente la stessa area dato che sono formate dagli stessi pezzi, ma probabilmente non



lo stesso perimetro. La sagoma può essere ottenuta dagli allievi o consegnata dal docente, con o senza le suddivisioni interne. In base alla sagoma consegnata il compito può essere più o meno difficile. Se si propongono i contorni di figure convesse, come rettangoli, triangolo, parallelogrammi la richiesta può risultare più impegnativa. A questo proposito si consulti anche la pratica didattica "Composizioni e scomposizioni di figure".



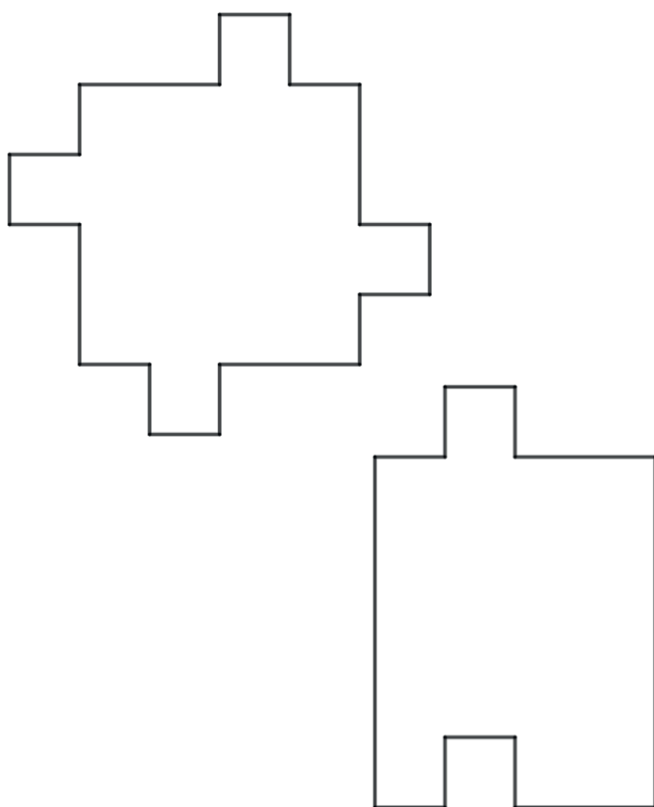
### Altri puzzle

Si possono proporre altri giochi tipo puzzle in cui, data una serie di pezzi tutti congruenti, si chiede di ricoprire con gli stessi pezzi supporti di forme diverse. Ad esempio, si può chiedere di utilizzare i seguenti 4 pezzi per ricoprire le seguenti due sagome.

Pezzi:



Sagome:



Successivamente si può chiedere agli allievi quale delle due sagome permette di tassellare il piano, ossia una volta riprodotta più volte non crea sovrapposizioni e non lascia "buchi".

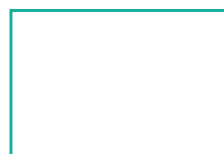
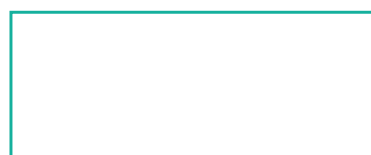
Ad allievi più grandi si può proporre una sfida a coppie in cui uno pensa a una sagoma formata dai 4 pezzi proposti inizialmente e la disegna senza farsi vedere dal compagno. Poi gliela consegna e chiede di tassellarla con i 4 pezzi dati nel minor tempo possibile. Una volta risolta la prima sfida si scambiano i ruoli e poi si confrontano i tempi trascorsi per le due prove.



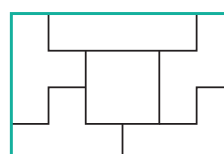
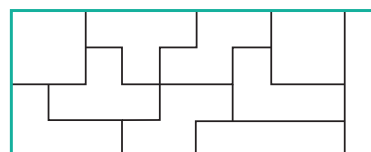
### Polimini tassellanti

In analogia alle attività precedenti, si possono proporre come pezzi da utilizzare per ricoprire una certa superficie i polimini, ossia figure composte da un certo numero di quadrati congruenti accostati lungo almeno un lato, partendo dapprima dai binini (due quadrati) e dai trimini (tre quadrati), per poi mostrare i tetramini (quattro quadrati) e solo alla fine i pentamini (cinque quadrati). A questo riguardo si consulti la pratica didattica "Composizioni e scomposizioni di figure" e il supporto "Polimini", che contiene il materiale da stampare e spunti per altre sfide più o meno complesse. Con gli allievi più piccoli si può richiedere di accostare liberamente i pezzi per analizzarne le caratteristiche, mentre per gli allievi più grandi si possono proporre delle attività sfidanti come quella di utilizzare i tetramini per tassellare i seguenti rettangoli, dei quali si forniscono anche le soluzioni.

Rettangoli da tassellare con tetramini:

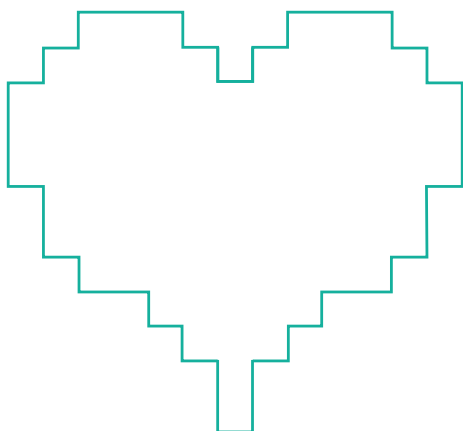


Rettangoli tassellati:

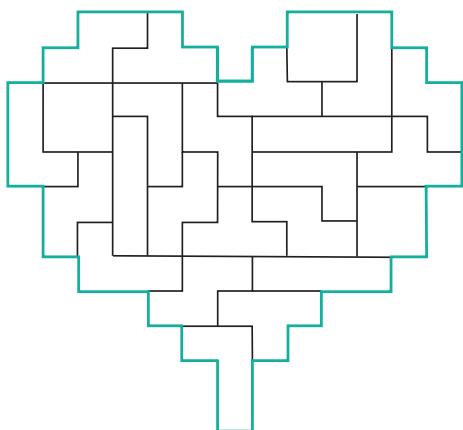


È anche possibile tassellare figure più complesse come la seguente.

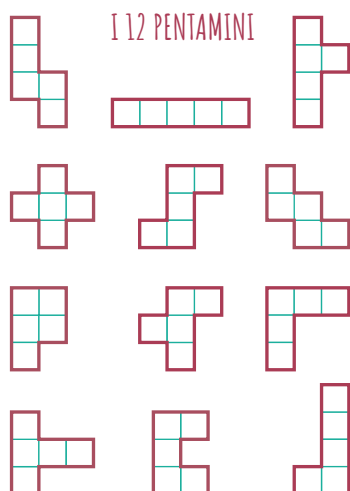
Cuore da tassellare con tetramini:



Cuore tassellato:

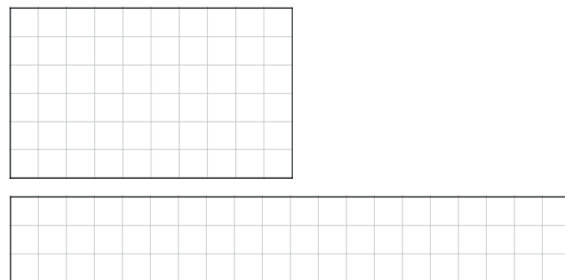


Il docente può decidere con allievi più grandi di complicare l'attività utilizzando i pentamini.



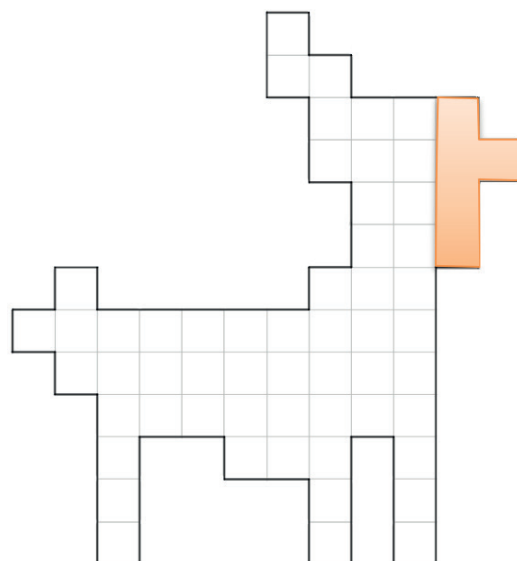
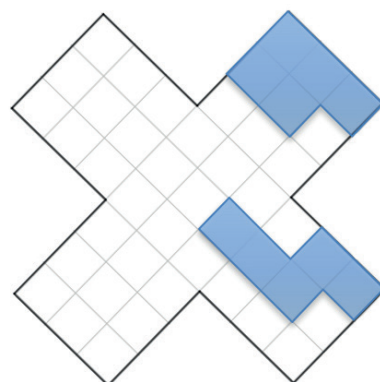
Si distribuiscono i 12 pezzi in cartoncino o in plastica e si chiede di tassellare i seguenti rettangoli, muniti o meno di quadrettatura per aiutare l'allie-

vo nelle sue considerazioni.



Sarà interessante far notare agli allievi del secondo ciclo che il numero dei quadretti dei rettangoli è pari a 60, così come la somma di tutti i quadretti che compongono i pentamini. Osservazioni di questo tipo possono aprire la discussione su questioni legate all'area e quindi all'ambito Grandezze e misure a cui si rimanda per un approfondimento.

Se gli allievi si appassionano ai puzzle e ad attività di questo tipo si possono proporre forme più complesse da riempire come le seguenti. Chiedendo loro quali di queste sagome rappresentano a loro volta tessere che tassellano il piano, ossia che riprodotte più volte creano un pavimento senza sovrapposizioni e senza lasciare parti di piano vuote.

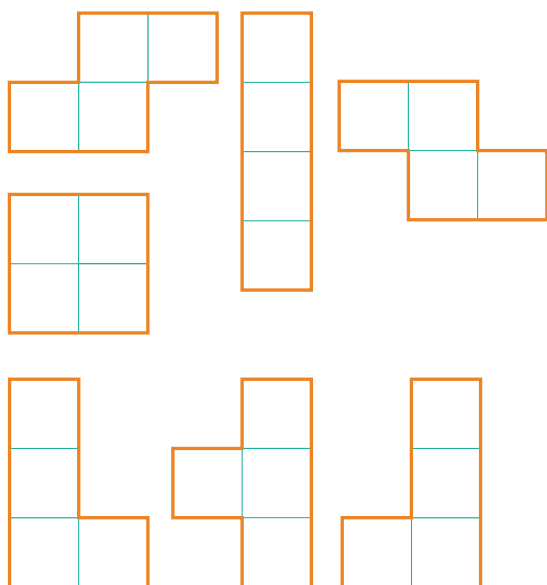






### Tetris da tavolo

Il gioco del Tetris, molto famoso negli anni '80, può essere un ottimo pretesto per far lavorare gli allievi sulla tassellazione presentando i tetramini che costituiscono i tasselli da accostare. In realtà i tetramini sono 5, mentre in questo gioco se ne propongono 7, dato che due sono ripetuti due volte e specchiati.



Forse non tutti gli allievi conoscono questo gioco, quindi vale la pena investire un po' di tempo inizialmente per introdurlo, indagando le conoscenze dei bambini in merito e ponendo domande esplorative sul suo funzionamento, sulle regole, sulle forme dei pezzi, sui supporti con cui si può giocare ecc.

A partire dai 7 pezzi del Tetris si potrebbe proporre ai bambini un'attività in cui si riproduce un gioco simile, in ambiente reale. Ogni coppia di allievi riceve un sacchettino che contiene una decina di copie di ognuno dei pezzi del Tetris. Si consiglia di utilizzare il supporto "Polimini" dove si trovano tutti i tasselli da stampare e ritagliare (i 7 pezzi del gioco sono ottenuti dai 5 tetramini, proponendone 2 anche ribaltati). Si può chiedere agli allievi di ricoprire una superficie data, della quale si è calcolata l'estensione in base alla grandezza dei pezzi, accostando i vari tasselli senza sovrapporli e senza lasciare parti di piano vuote. Sarà bene specificare che i pezzi possono essere ruotati in modo da avere l'incastro ottimale. L'attività può essere accompagnata anche dal gioco in ambiente virtuale dando la possibilità agli allievi di sperimentare la tassellazione attraverso app o software specifici.



### Tassellazioni nell'arte

Sulla scia della precedente attività "Tasselli per decorazioni" si possono proporre momenti legati all'arte, sempre particolarmente apprezzati dagli allievi, in cui si mostrano alcune opere in cui gli artisti si sono cimentati in modo originale e a volte bizzarro nell'accostare forme e colori.

Si possono far conoscere le opere di Piet Mondrian (1872–1944) oppure quelle di Maurits Cornelis Escher (1898–1972), artista olandese che si è dedicato a tassellare il piano e lo spazio, a realizzare costruzioni impossibili, a esplorare l'infinito, interessando con le sue opere anche matematici di tutto il mondo.

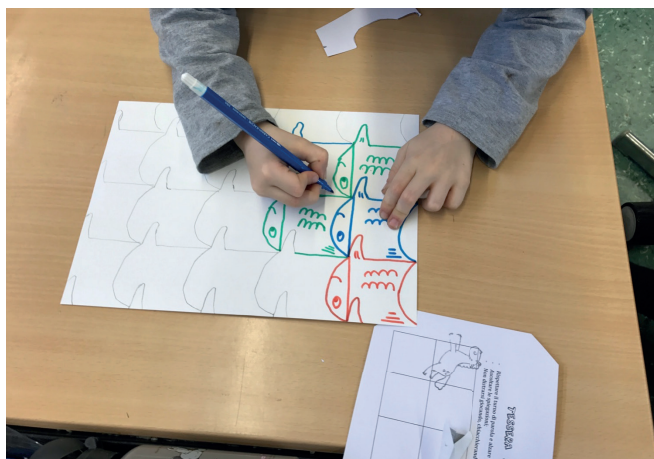
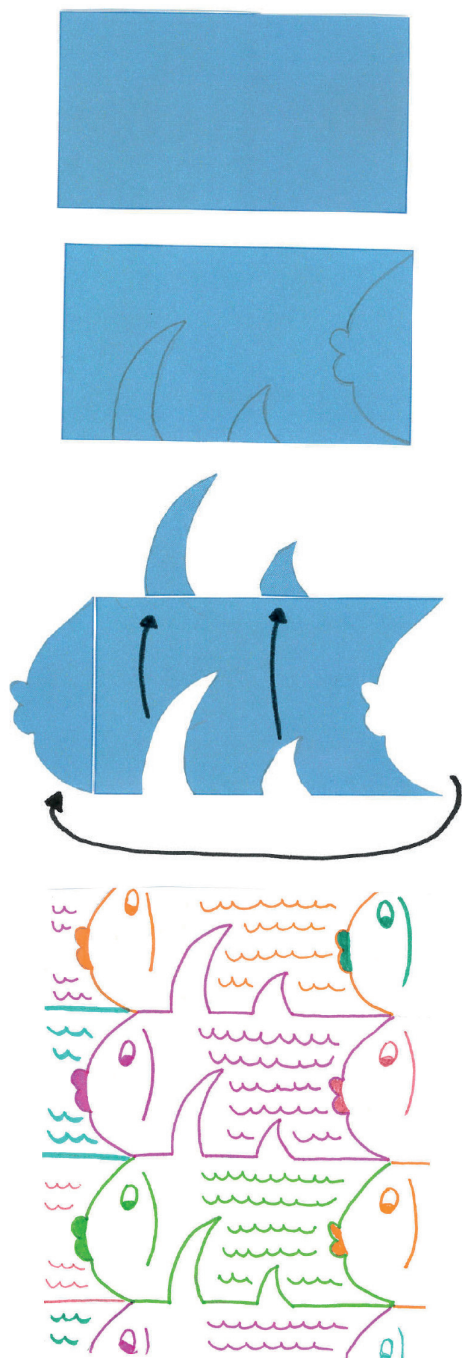
Come per tutte le attività in cui si propongono delle opere di artisti, si può inizialmente raccontare qualche aneddoto della vita dei personaggi, qualche informazione curiosa per introdurre l'artista, per poi mostrare alcune delle sue opere più rappresentative, nelle quali gli allievi possono discutere i legami più vicini alla matematica, alla geometria e in particolare al tema delle tassellazioni. Dall'osservazione delle opere gli allievi si rendono conto che Mondrian usa spesso figure note, prevalentemente rettangoli, mentre Escher non maneggia semplici figure geometriche come quadrati, triangoli, rettangoli, ma parte da questi e li trasforma in forme che prendono vita, come vari tipi di animali, assemblandoli nelle maniere più disparate.

Si può prendere spunto dalle opere di Escher per creare delle tassellazioni originali. Ad esempio, si può usare la tecnica che consiste nel partire da una figura che tassella e nel tagliare e recuperare ciò che viene tolto da una parte, aggiungendolo dall'altra, in questo modo la figura che si ottiene è anch'essa una figura che tassella.

Si può quindi consegnare ad esempio un quadrato o un rettangolo di cartoncino non troppo spesso e chiedere agli allievi di procedere nel seguente modo:

- *Disegnate delle linee a vostro piacimento su uno o due lati adiacenti;*
- *ritagliate le figure ottenute e fissatele con del nastro adesivo sui rispettivi lati opposti del quadrato (o del rettangolo);*
- *replicate il tassello che avete preparato ripassandone il contorno e utilizzatelo per iniziare la tassellazione;*
- *decorate i tasselli colorandoli a piacere".*





Questa procedura è riportata anche all'interno del quaderno didattico della collana Praticamente [“In arte... Matematica!”](#), della pratica didattica “Matematica e arte nel primo ciclo” e della scheda per l'allievo “Pesci e tasselli”.



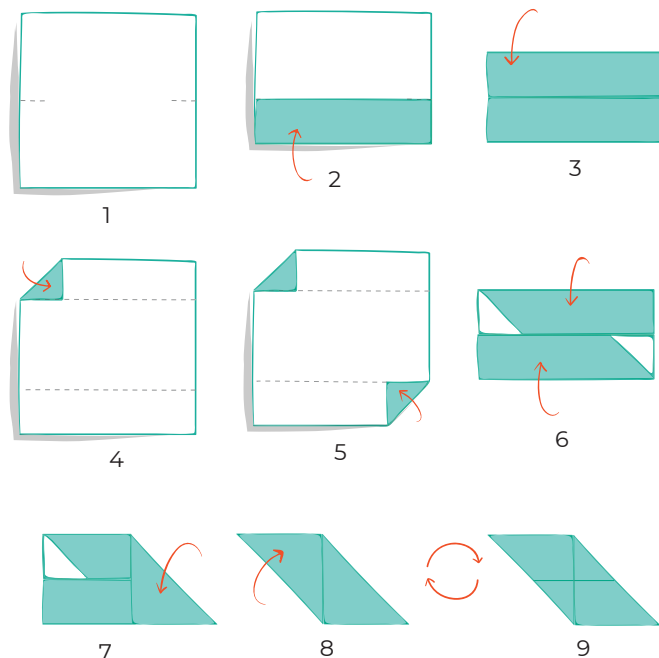
### Tassellazioni con origami

Se gli allievi utilizzano abitualmente la tecnica degli origami nelle attività di geometria sarà di certo ben accetta anche questa in cui si costruiscono semplici moduli che vengono incastrati in modo da creare una variopinta tassellazione del piano.

Si possono creare diversi tasselli con la tecnica degli origami, qui ne proponiamo alcuni. Si rimanda alla scheda didattica [“Tassellazioni”](#) e al blog [“Geometria in vacanza”](#) per ulteriori approfondimenti.

### Moduli a forma di parallelogramma

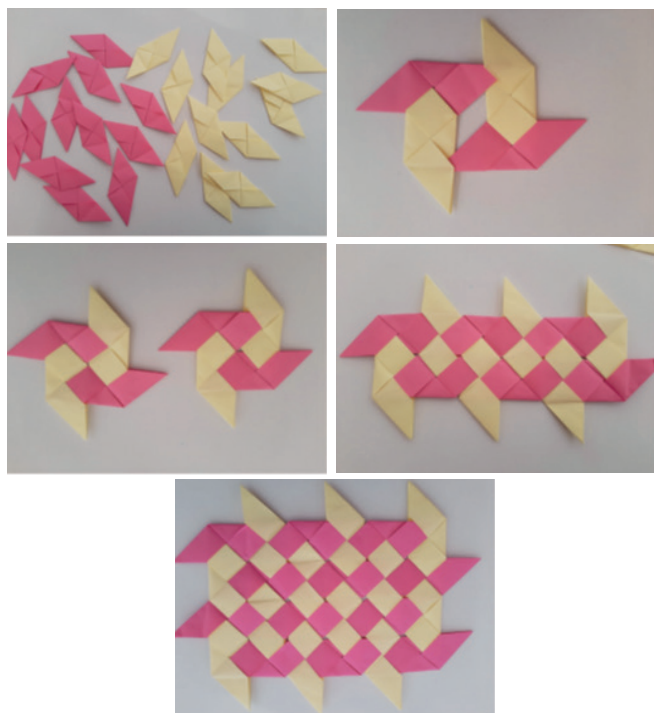
Il docente consegna a ciascun allievo 24 foglietti quadrati (di lato 9 o 10 cm) di due colori diversi (12 di un colore e 12 dell'altro) e fornisce le istruzioni per realizzare un modulo base mostrando il seguente schema, oppure fornendo le indicazioni linguistiche e mostrando concretamente le azioni da svolgere a ciascun passo.



Dopo aver realizzato tutti i moduli si possono assemblare in modo da comporre 6 girandole, per poi unirle in modo da ricoprire il piano. Per rendere più robusto il tappeto creato si può incolla-

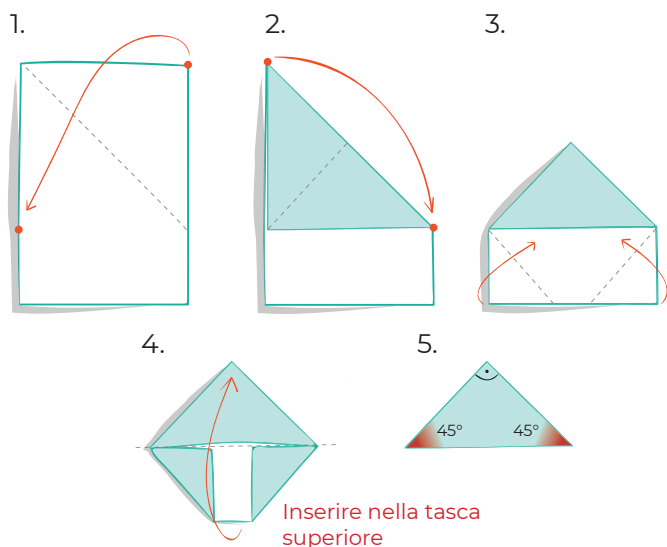


re. Dopo averlo fotografato, si può poi utilizzare come tovaglietta, come quadretto da appendere a una parete, o come regalo per un amico.



### Moduli a forma di triangolo rettangolo isoscele

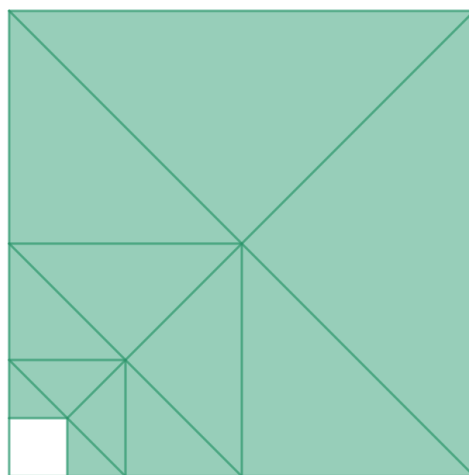
Si consegnano agli allievi alcuni fogli formato A4, alcuni fogli formato A5 e altri formato A3. Si propone di creare con i fogli a disposizione dei triangoli rettangoli isosceli seguendo le istruzioni rappresentate in figura.



Una volta ottenuti i triangoli di varie grandezze si può chiedere agli allievi di accostarli in modo che si possa ricoprire il piano. La realizzazione del-

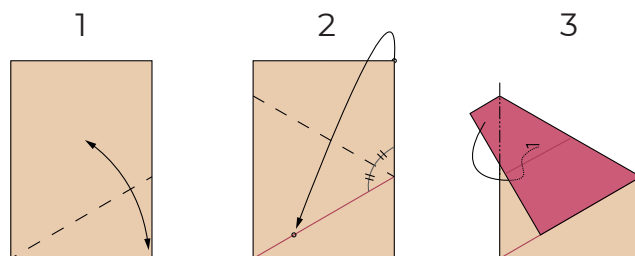
le tassellazioni porta a osservare le relazioni tra i moduli base creati, le loro analogie e le differenze. In un secondo ciclo si possono condurre alcune riflessioni sulla relazione tra i triangoli ottenuti e sulle loro caratteristiche, identificando così i triangoli simili, i cui lati corrispondenti hanno lunghezze proporzionali. Con queste tessere si possono ottenere diverse tassellazioni.

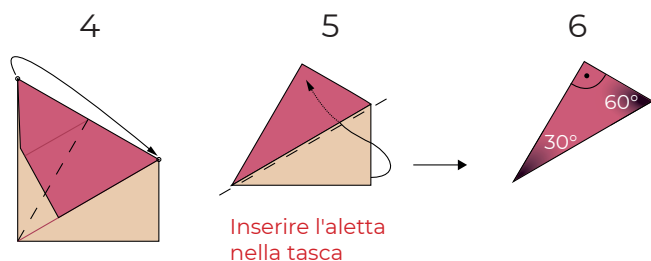
Una configurazione particolarmente interessante anche dal punto di vista matematico è riportata in figura. Per realizzarla si possono utilizzare 4 fogli A4. Da due dei fogli si ricavano quattro fogli formato A5, piegandoli ciascuno lungo la mediana di lunghezza minore. Da due di questi fogli A5 allo stesso modo si ottengono quattro fogli A6. Analogamente da due di questi fogli A6 si ricavano quattro fogli A7, e così via fino ad ottenere 4 fogli di formato A9. Di questi ultimi ne useremo solo 2. Seguendo le istruzioni dell'origami precedente con i 12 fogli ottenuti si costruiscono dei triangoli rettangoli isosceli congruenti che possono essere assemblati in modo da ottenere la seguente configurazione.



### Moduli a forma di triangolo rettangolo con angoli di ampiezza 30°, 60° e 90°

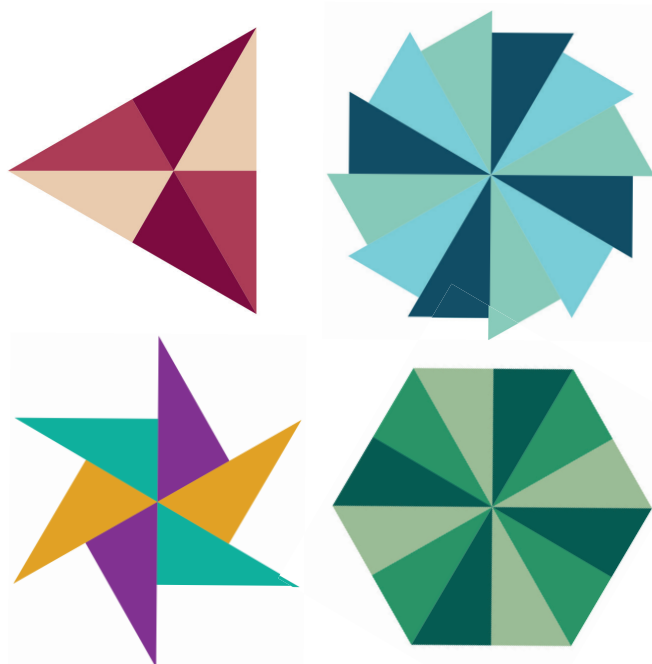
Oltre alla costruzione di triangoli rettangoli isosceli si può costruire un triangolo rettangolo con gli angoli acuti di ampiezze 30° e 60°. Si può procedere seguendo queste istruzioni:





Gli accostamenti successivi delle tessere possono essere i più disparati (si veda a questo proposito la pratica didattica "Composizioni e scomposizioni di figure"). Con gli allievi del secondo ciclo si può proporre di accostare i triangoli in un unico punto e cominciare a riflettere sul fatto che tutte le composizioni che vengono realizzate hanno una caratteristica comune, che emergerà meglio nelle prossime attività: la somma delle ampiezze degli angoli dei tasselli che convergono in un punto deve essere pari a  $360^\circ$ .

Ecco alcuni esempi di configurazioni possibili:

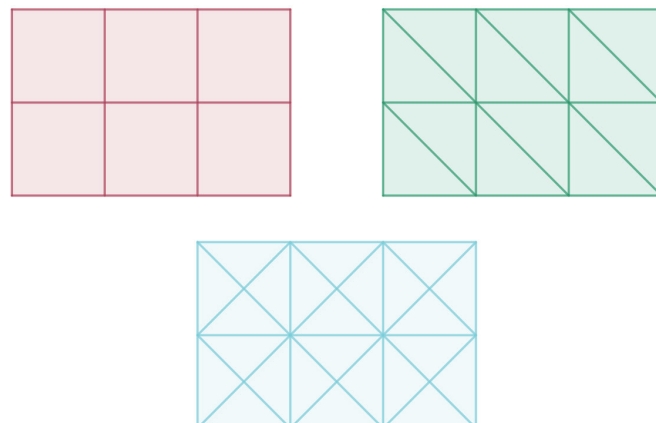


Con gli allievi si potrà riflettere ulteriormente su quali delle configurazioni trovate costituiscono una figura che permette di tassellare il piano.

### **Pezzi in relazione**

Attraverso le precedenti attività gli allievi hanno scoperto una serie di figure che permettono di tassellare. Si può ora osservare che se uno di questi tasselli viene suddiviso in altri tasselli anche questi ultimi permetteranno di tassellare il piano. Ad esempio, se si utilizza un quadrato per tassellare il piano, scomponendolo in due o quat-

tro triangoli rettangoli anche questi tasselleranno il piano.



Con gli allievi del secondo ciclo si può impostare un lavoro sull'area a partire dalla precedente considerazione: si può chiedere agli allievi di identificare la relazione che c'è tra il numero di quadrati rossi, il numero di triangoli verdi e il numero di triangoli azzurri che tassellano il rettangolo rappresentato, per poi avviare una discussione.

Contando tutte le tessere che ricoprono la superficie del rettangolo iniziale, gli alunni effettuano una misurazione diretta dell'area e possono scoprire che il numero varia in base alle tessere scelte come unità di misura:

- un quadrato rosso è equiesteso a 2 triangoli verdi, dunque, dato che di quadrati ne occorrono 6 per ricoprire l'intero rettangolo, di triangoli verdi ne occorreranno 12;
- un triangolo verde è equiesteso a 2 triangoli azzurri, dunque, dato che di triangoli verdi ne occorrono 12, occorreranno 24 triangoli azzurri per ricoprire l'intero rettangolo.

Un'attività analoga può essere quella suggerita nel blog ["Diver-tiamoci con l'area. Prima parte: Le tassellazioni del piano"](#) in cui si parte da una configurazione

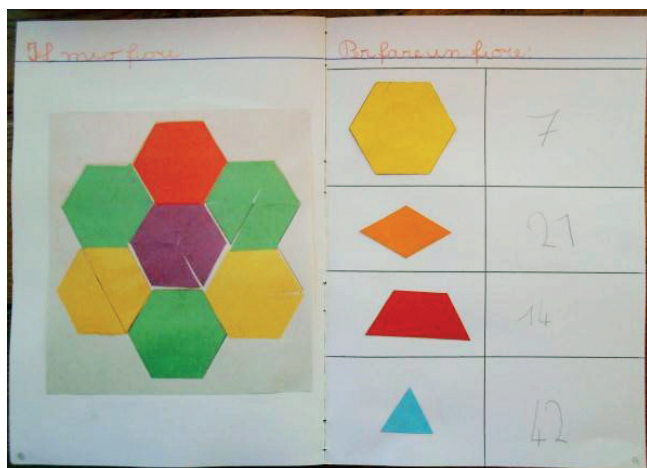
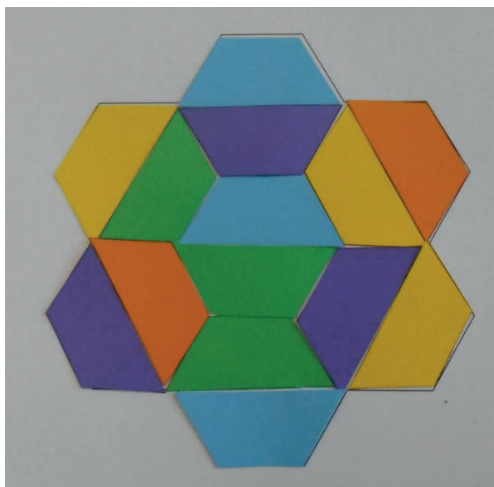


rappresentante un fiore composto da sette esagoni regolari che si trova anche rappresentato in reali pavimentazioni. Si possono distribuire agli allievi alcuni esagoni in cartoncino colorato e si chiede di riprodurre il fiore. Si propone poi di scomporre altri tasselli esagonali in forme diverse, ad esempio in due trapezi isosceli, in tre rombi, oppure in sei triangoli equilateri e di ricostruisce il fiore con questi nuovi tasselli. Per concludere l'at-





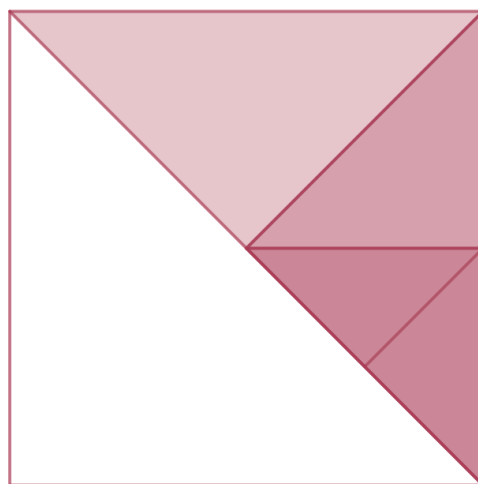
tività si può chiedere agli allievi di compilare una scheda con le numerosità dei tasselli utilizzati in modo da poter confrontare la relazione tra le aree delle figure.



Con queste tessere si possono creare anche personaggi di fantasia e inventare storie geometriche.



In modo analogo si può lavorare con i pezzi del tangram e capire la relazione tra le loro aree. Durante lo svolgimento dell'attività si possono porre diverse domande del tipo: "Quanti triangoli più piccoli servono per ricoprire il quadrato? Quanti triangoli medi? Quanti triangoli più grandi? Quanti quadrati?". Ad esempio, accostando i triangoli che compongono il tangram a ricoprire la metà del quadrato, come in figura, si può notare che l'area del triangolo medio è metà dell'area di quello più grande, e che l'area del triangolo più piccolo è metà dell'area di quello medio; inoltre, l'area del triangolo più grande è un quarto dell'area del quadrato, l'area del triangolo medio è un ottavo dell'area del quadrato e l'area del triangolo più piccolo è un sedicesimo dell'area del quadrato. Si rimanda alla pratica didattica "Composizioni e scomposizioni di figure" per ulteriori spunti di attività.



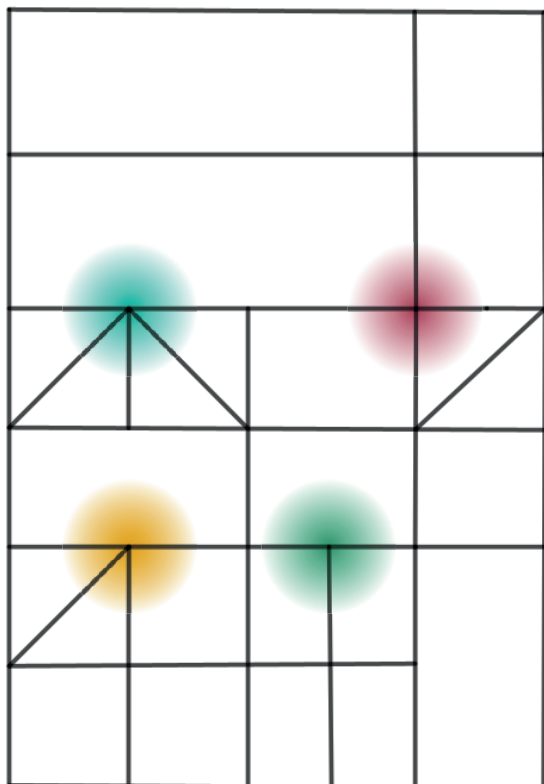
### Le ampiezze degli angoli in una tassellazione

Con gli allievi del secondo ciclo è importante arricchire le regole della tassellazione introducendo le relazioni tra le ampiezze degli angoli che incidono in un punto. Queste relazioni permettono di capire quando si riesce e quando non si riesce a ricoprire il piano con determinati poligoni. Per affrontare questo tipo di attività è necessario che gli allievi conoscano il concetto di angolo, di angolo interno di un poligono e di ampiezza di un angolo.

Con le prime attività proposte in questa pratica gli allievi hanno sperimentato che alcune figure tassellano e altre no, e che tra quelle che non permettono la tassellazione vi sono anche esempi di poligoni. Si può proporre una riflessione sulle



ampiezze degli angoli dei poligoni che incidono in un determinato punto facendo analizzare una tassellazione nota o proposta ad hoc agli allievi. Una possibilità è quella di sfruttare ancora una volta un'opera di un artista, ad esempio *Castello e sole* del tedesco naturalizzato svizzero Paul Klee (1879–1940). Se si osserva l'opera si possono identificare diversi poligoni che compongono la tassellazione del rettangolo. Per analizzare gli angoli dei poligoni che incidono in un vertice si può proporre agli allievi una rappresentazione in bianco e nero di un dettaglio dell'opera come quello proposto in figura, per poi chiedere di osservare ogni punto di incontro delle linee e di analizzare l'ampiezza degli angoli coinvolti. Gli allievi riconosceranno che, anche se cambiano i valori delle ampiezze degli angoli coinvolti, la loro somma rimane costante a  $360^\circ$ .

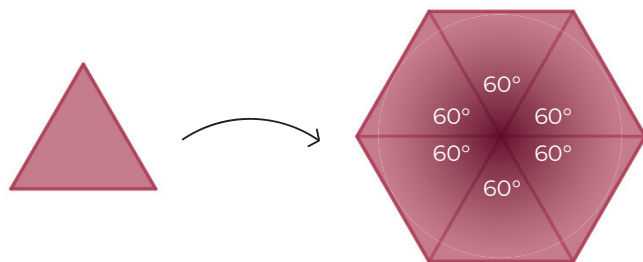


### Quali poligoni regolari tassellano?

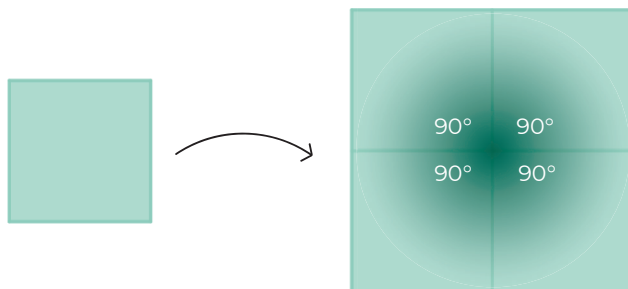
Dopo aver riflettuto nell'attività precedente sulle ampiezze degli angoli di una tassellazione data e aver compreso che la somma delle ampiezze degli angoli che incidono in un punto è pari a un angolo giro, si può analizzare che cosa succede per i poligoni regolari fornendo agli allievi diverse tessere (triangoli equilateri, quadrati, pentagoni regolari, esagoni regolari, ettagoni regolari e otta-

goni regolari). Una prima richiesta potrebbe essere quella di individuare l'ampiezza degli angoli interni dei diversi poligoni regolari, ricordando che sono tutti congruenti.

Nel caso del triangolo equilatero si può osservare che essendo  $60^\circ$  l'ampiezza di ciascun angolo interno è possibile far incidere 6 triangoli equilateri in un punto in modo da non avere sovrapposizioni e da non lasciare parti di piano vuote.



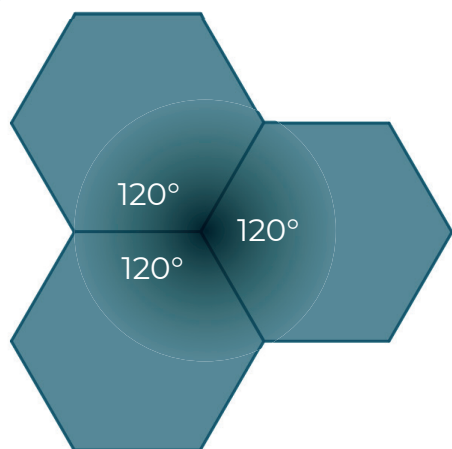
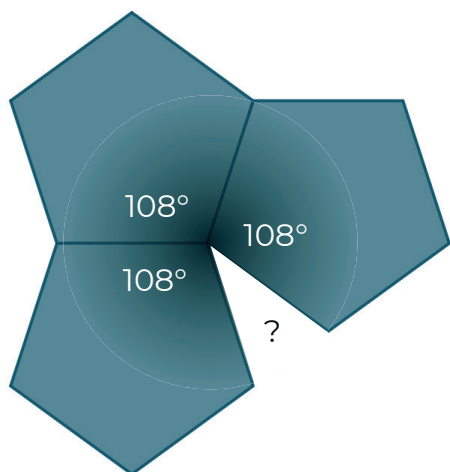
Analogamente, prendendo in considerazione il quadrato i cui angoli interni hanno l'ampiezza di  $90^\circ$ , gli allievi possono osservare che servono 4 quadrati che incidono in un punto per creare una tassellazione.



A questo punto si può riflettere con gli allievi su come capire se un poligono regolare può o meno tassellare il piano: l'ampiezza di un angolo interno del poligono regolare deve essere un divisore di  $360^\circ$ , l'ampiezza dell'angolo giro.

Procedendo con la verifica si osserva che il pentagono regolare non può tassellare, dato che l'ampiezza di ogni suo angolo interno misura  $108^\circ$ , che non è un divisore di  $360^\circ$ . Se si fanno incidere in un punto tre pentagoni regolari si lascia una parte di piano vuota, se si fanno incidere quattro pentagoni regolari si ottiene una sovrapposizione delle tessere. Provando con l'esagono regolare, invece, con tre tessere si ha la tassellazione, infatti  $120^\circ$ , ossia l'ampiezza dell'angolo interno dell'esagono regolare, è divisore di  $360^\circ$  (e se si effettua la divisione  $360^\circ : 120^\circ$  si ottiene proprio 3, il numero intero di tasselli esagonali necessari per realizzare la tassellazione).



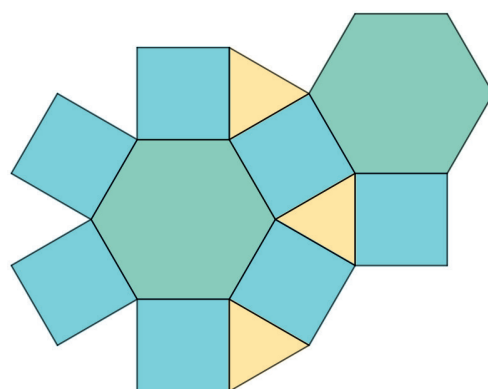
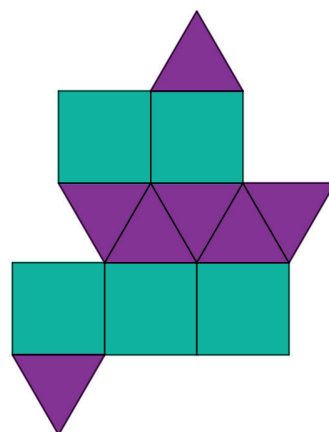
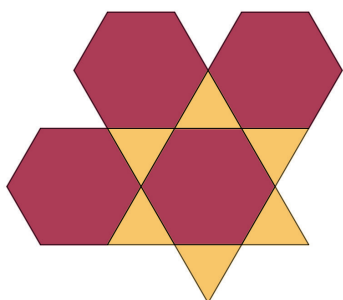


Si può sperimentare infine che aumentando il numero di lati dei poligoni regolari (ad esempio prendendo l'ottagono regolare), non si riescono a inserire 3 poligoni regolari per ricoprire il piano (si avrebbe una sovrapposizione delle tessere), mentre 2 poligoni regolari lasciano una parte di piano vuota. Si può dunque concludere che gli unici poligoni regolari che tassellano il piano sono: il triangolo equilatero, il quadrato e l'esagono regolare.



### Completa tu!

Combinando aspetti geometrici con aspetti più artistici si può proporre agli allievi di completare una tassellazione composta da diversi tipi di poligoni, regolari e non, di cui è accennata solamente una parte, come negli esempi in figura.



Gli allievi, avendo diverse figure a disposizione, possono provare a proseguire la tassellazione prima scegliendo le figure, e in un secondo momento giustificando la scelta con considerazioni geometriche sulle ampiezze degli angoli. Con gli allievi del secondo ciclo si può proseguire l'attività chiedendo di disegnare la tassellazione utilizzando gli strumenti da disegno. L'attività richiede molta precisione e competenze geometriche, per facilitare la realizzazione si possono fornire agli allievi delle griglie quadrettate o isometriche a seconda delle configurazioni proposte.

Sarà anche importante chiedere di descrivere la tassellazione che gli allievi hanno realizzato, soffermandosi sulle figure geometriche utilizzate, denominandole, descrivendole, indicandone le caratteristiche che hanno determinato la loro scelta richiedendo un appropriato linguaggio specifico.

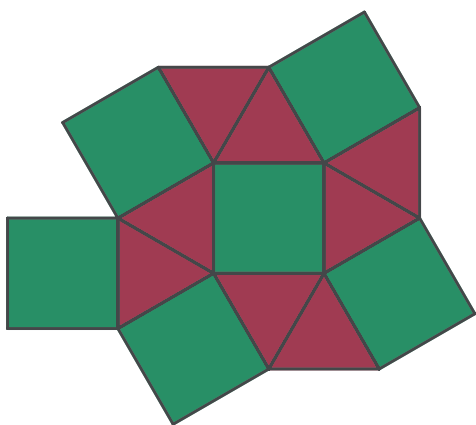
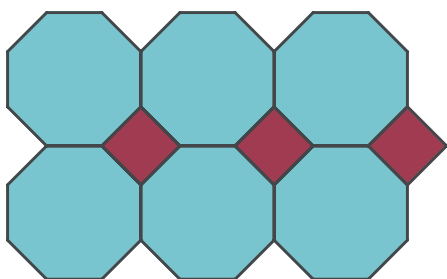


### Occhio all'angolo!

Un'altra attività che si può proporre relativamente al tema delle ampiezze degli angoli in una tassellazione consiste in un gioco collaborativo a coppie. Ogni coppia ha a disposizione una serie di poligoni regolari sul tavolo con i lati della stessa lunghezza. Ogni allievo deve scegliere un tassello e deve disporlo sul tavolo in modo da far coincide-



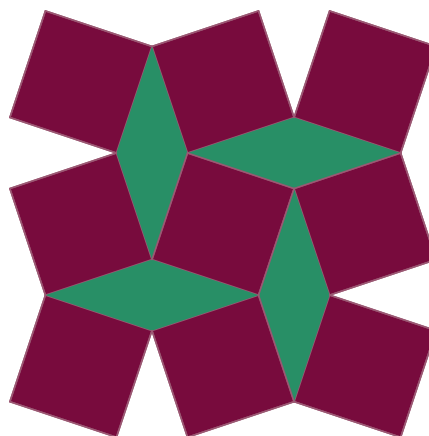
re un suo lato con quello di un altro già posizionato. Non necessariamente deve essere utilizzato lo stesso tipo di figura, anzi si chiede di spaziare con la fantasia come negli esempi in figura. L'obiettivo è tassellare il banco, quindi attenzione a scegliere i pezzi adatti! Essendo i lati della stessa lunghezza, gli allievi si focalizzeranno sulle ampiezze degli angoli dei poligoni che incidono in un vertice.



Dopo che ciascuna coppia ha realizzato la sua tassellazione, si chiede di scrivere attorno a ogni vertice l'ampiezza degli angoli dei poligoni e di verificare che la loro somma sia  $360^\circ$ .

### Ancora angoli

Per lavorare ancora più approfonditamente sul tema delle ampiezze degli angoli interni dei poligoni in relazione con la tassellazione si mostrano agli allievi alcune configurazioni costituite da uno o più poligoni regolari e non. Dopo aver individuato i poligoni che compongono la figura e averli denominati si chiede di trovare l'ampiezza di ciascuno degli angoli interni. Si potrebbero sfidare gli allievi a determinare gli angoli interni senza misurarli con il goniometro, ma solamente basandosi sulle caratteristiche della figura proposta. Si può poi chiedere agli allievi di riprodurre queste configurazioni o altre di fantasia, utilizzando lo stesso tipo di tasselli.



### Tassellazioni con poligoni non regolari

Con questa attività si vuole mostrare agli allievi che con qualunque triangolo o con un qualunque quadrilatero, non necessariamente regolari, si può tassellare.

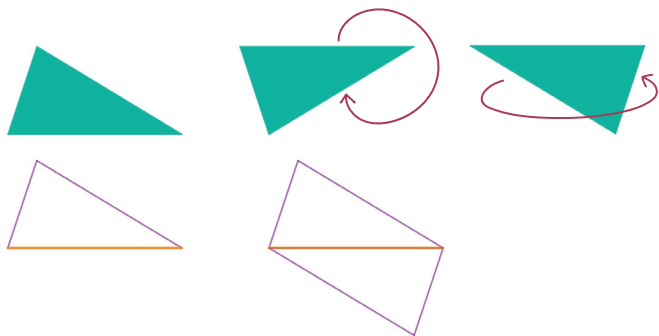
### Triangoli

Si chiede a ciascun allievo di disegnare e ritagliare un triangolo qualsiasi, ognuno avrà il suo, di ripassare il suo contorno su un foglio e di considerare un lato di riferimento che può essere sottolineato con un colore. A questo punto si chiede agli allievi di prendere il triangolo ritagliato e di operare un doppio "ribaltamento", prima lungo il lato considerato e poi lungo l'asse di simmetria del lato considerato. Matematicamente parlando, si chiede di ruotare il modellino di  $180^\circ$ . Successivamente, gli allievi possono appoggiare il modellino al disegno realizzato in precedenza in modo che il lato colorato coincida con lo stesso lato nel modellino ribaltato e si chiede di ripassare il suo contorno. Si ottiene così un quadrilatero composto da due

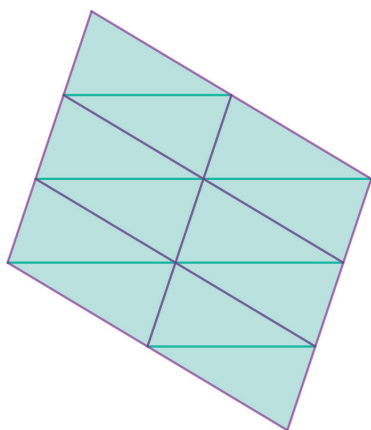




triangoli uguali a quello di partenza con due coppie di lati paralleli, ossia un parallelogramma.

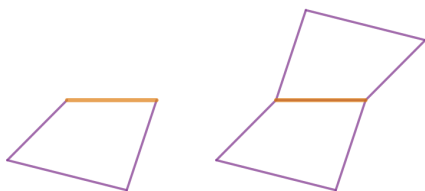


Con questo tassello parallelogramma è facile ora ricoprire il piano, ad esempio creando una tassellazione in strisce parallele:

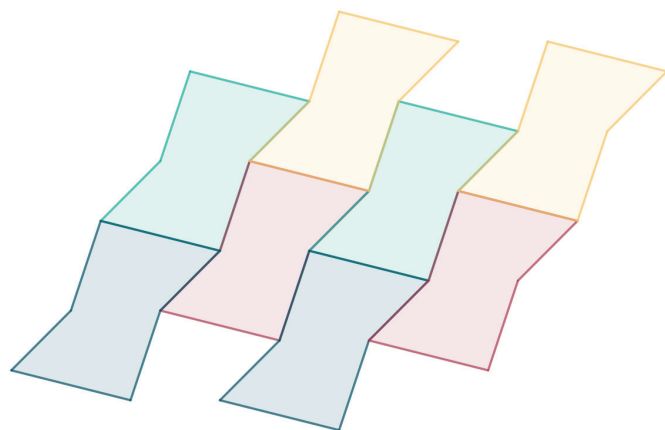


### Quadrilateri

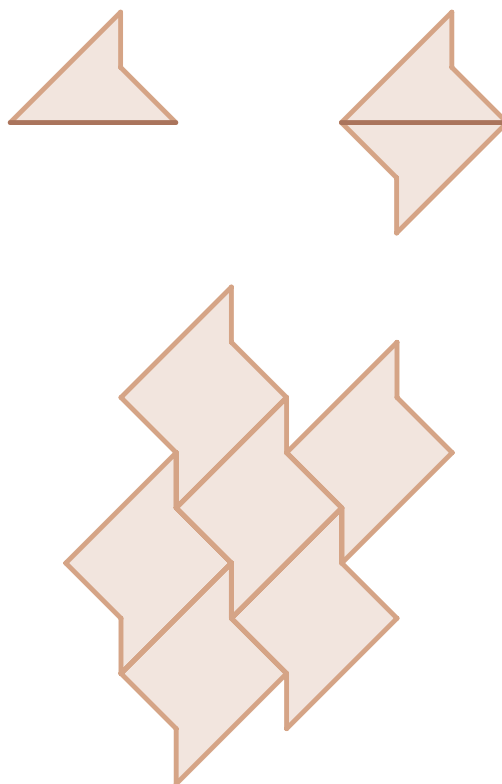
In modo analogo si può chiedere di costruire un quadrilatero generico (stimolando la fantasia degli allievi, chiedendo loro di non vincolarsi ai quadrilateri tradizionali) e di operare allo stesso modo di prima: identificando un lato, ribaltando il modellino rispetto al lato, poi rispetto al suo asse (ovvero ruotare il quadrilatero di  $180^\circ$ ).



Con il tassello costruito (un esagono con tre coppie di lati paralleli) gli allievi possono ricoprire il piano e verificare il lavoro svolto.



Lo stesso vale ovviamente anche per quadrilateri concavi, che non sempre gli allievi tendono a considerare nelle loro sperimentazioni. È quindi utile che il docente favorisca anche l'utilizzo di questo tipo di figure. Altre attività sul tema delle trasformazioni si trovano nella pratica didattica "Trasformazioni geometriche".



### È tutto un tassello!

Il lavoro svolto finora è prettamente legato a supporti concreti, tasselli di cartoncino o plastica, costruzioni di origami, utilizzo di strumenti da disegno. Tuttavia, il tema della tassellazione si presta particolarmente per essere accompagnato e



supportato anche da software di geometria dinamica, come GeoGebra, quaderni Cabri (si veda il quaderno didattico “[È tutto un tassello](#)”), app sviluppate ad accesso gratuito (alcune si trovano all’interno della scheda didattica “[App per scoprire, esercitare e approfondire](#)”), o in piattaforme web come <https://it.mathigon.org/>.

È importante tenere in considerazione che le esperienze proposte attraverso l’uso di software assumono particolare valore se accompagnate in parallelo da quelle vissute in ambiente reale. Si consiglia quindi di alternare i due momenti scegliendo via via i supporti più adatti e sfruttando, dove possibile, i software che la scuola già adotta.





## TRAGUARDI DI COMPETENZA PREVALENTI (I CICLO)

L'allievo:

- riconosce, denomina e descrive le più comuni figure del piano e dello spazio, oltre a semplici relazioni e strutture legate alla lettura della realtà che lo circonda;
- confronta, classifica e ordina lunghezze legate alla sua realtà ed effettua nel concreto misure per confronto con una grandezza scelta come unità;
- esplora, comprende, prova e risolve situazioni-problema contestualizzate legate al vissuto e alla realtà che coinvolgono i primi apprendimenti in ambito numerico, geometrico e relativi a grandezze riferite alla sua quotidianità;
- progetta e realizza rappresentazioni e modelli non formalizzati legati all'interpretazione matematica del mondo che lo circonda;
- presenta, descrive e motiva le proprie scelte prese per affrontare una semplice situazione matematica legata alla realtà in modo tale che risultino comprensibili ai compagni, come pure comprende le descrizioni e presentazioni degli altri;
- manifesta un atteggiamento positivo rispetto all'apprendimento quando si affrontano esperienze relative alla matematica.

## TRAGUARDI DI COMPETENZA PREVALENTI (II CICLO)

L'allievo:

- riconosce, denomina, descrive e rappresenta figure (del piano e dello spazio), relazioni e strutture legate all'interpretazione della realtà o a una loro matematizzazione e modellizzazione;
- classifica le principali figure del piano in base a caratteristiche geometriche;
- confronta, classifica e ordina le più comuni grandezze ed effettua e calcola misure dirette e indirette legate alla realtà e a situazioni ideali ancorate nel concreto;
- determina misure significative delle principali figure del piano;
- comprende e risolve con fiducia e determinazione situazioni-problema in tutti gli ambiti di contenuto previsti per questo ciclo, legate al concreto o astratte ma partendo da situazioni reali, mantenendo il controllo critico sia sui processi risolutivi sia

sui risultati, esplorando e provando diverse strade risolutive;

- costruisce ragionamenti, fondandosi su ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista di altri;
- utilizza strumenti, convenzionali e non, per affrontare una situazione, in particolare strumenti per il disegno tecnico (riga, compasso, squadra) e strumenti di misura (metro, contenitore graduato, goniometro ecc.);
- progetta e realizza rappresentazioni e modelli di vario tipo, matematizzando e modellizzando situazioni reali impregnate di senso;
- comunica e argomenta procedimenti e soluzioni relative a una situazione, utilizzando diversi registri di rappresentazione semiotica; comprende, valuta e prende in considerazione la bontà di argomentazioni legate a scelte o processi risolutivi diversi dai propri;
- manifesta un atteggiamento positivo rispetto alla matematica, tramite esperienze significative che gli permettano di cogliere in che misura gli strumenti matematici che ha imparato a utilizzare siano utili per operare nella realtà.

## COLLEGAMENTI CON ALTRE DISCIPLINE



Area lingue



Area arti

## COMPETENZE TRASVERSALI

- Pensiero riflessivo e critico (riconoscimento bisogno, analisi/comprendimento, ricerca delle connessioni, interpretazione/giudizio, autoregolazione, considerazione risorse e vincoli, riconoscimento diversi punti di vista).
- Pensiero creativo e risoluzione dei problemi (messa a fuoco del problema, formulazione di ipotesi, attivazione strategie risolutive, autoregolazione, atteggiamento positivo, sensibilità al contesto).
- Tecnologie e media.

## FORMAZIONE GENERALE

Cittadinanza, culture e società.  
Scelte e progetti personali.