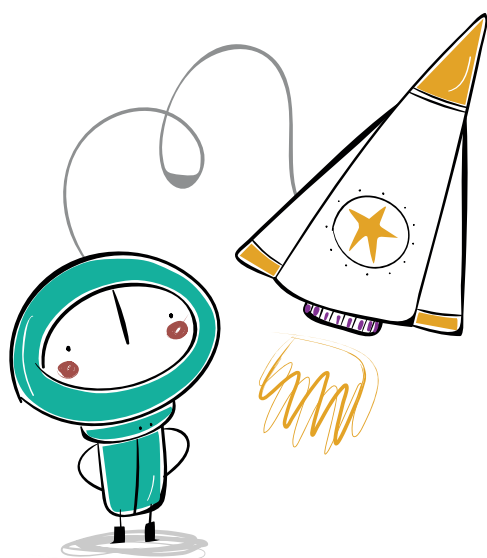


LINEE GUIDA DEL PROGETTO MAMA

Impostazione metodologica,
disciplinare e didattica del progetto

Ambito Numeri e calcolo

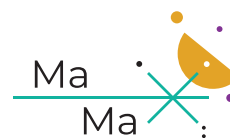


di **Silvia Sbaragli**

con la collaborazione di Luca Crivelli, Angelica Di Domenico,
Carlo Mina, Monica Panero, Claudio Poretti e Monica Treppiedi

INDICE

MAMA SI PRESENTA	3
1. MATERIALI MAMA	4
1.1 Materiali per il docente	4
1.1.1 Contesti di senso	4
1.1.2 Pratiche didattiche	6
1.1.3 Problemi	7
1.1.4 Giochi	10
1.1.5 Supporti	11
1.2 Materiali per l'allievo	11
2. ATTINENZA CON IL PIANO DI STUDIO	12
3. COME UTILIZZARE MAMA	18
4. AMBITO NUMERI E CALCOLO	19
4.1 Senso del numero	19
4.1.1 Funzioni del numero	20
4.1.2 Stima	20
4.2 Conteggio	23
4.2.1 Corrispondenza biunivoca	26
4.2.2 Conta	30
4.2.3 Enumerazione	32
4.3 Sistema numerico decimale	33
4.3.1 Scrittura del numero	36
4.3.2 Raggruppamenti	38
4.3.3 Altri sistemi numerici	40
4.4 Ordinamento	49
4.5 Successioni	50
4.6 Sottoinsiemi dei numeri naturali	56
4.6.1 Pari e dispari	58
4.6.2 Numeri primi	59
4.7 Interpretazioni dei numeri razionali	62
4.7.1 Frazioni	63
4.7.2 Numeri decimali	70
4.8 Operazioni	73
4.8.1 Addizione	77
4.8.2 Sottrazione	79
4.8.3 Moltiplicazione	80
4.8.4 Divisione	82
4.8.5 Strategie di calcolo	84
4.9 Grafici e tabelle	92
4.10 Combinatoria e probabilità	98
Bibliografia	102



MAMA SI PRESENTA

“MaMa - Matematica per la scuola elementare” è una raccolta di materiali didattici per l’insegnamento della matematica nella scuola elementare.

Le proposte MaMa sono state progettate e realizzate per fornire agli insegnanti di scuola elementare, e di conseguenza ai loro allievi, stimoli e attività finalizzati allo sviluppo di competenze matematiche coerenti con le indicazioni del Piano di studio della scuola dell’obbligo ticinese (2015), da qui in avanti denominato Piano di studio.

Tali proposte sono state suddivise nei tre ambiti di competenza: *Numeri e calcolo*, *Geometria e Grandezze e misure* e riguardano tutte le classi di scuola elementare. Ogni ambito è strutturato per tipologie di materiali rivolti al docente (*contesti di senso, pratiche didattiche, problemi, giochi e supporti*) o all’allievo (*schede didattiche*).

Il progetto è stato voluto dalla Sezione delle scuole comunali del Dipartimento dell’educazione, della cultura e dello sport con l’intento di soddisfare l’esigenza manifestata da docenti e direttori di disporre di materiale didattico di matematica fruibile e in linea con il Piano di studio.

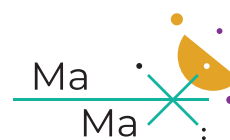
Team di progetto. Il progetto è stato realizzato da un team del Centro competenze didattica della matematica del Dipartimento formazione e apprendimento della SUPSI di Locarno.

Le persone coinvolte, coordinate dalla responsabile del centro Silvia Sbaragli, possiedono competenze diversificate e complementari e ciò allo scopo di permettere la realizzazione di un progetto completo, organico, coerente e innovativo. Fanno parte del team i docenti di scuola elementare, Luca Crivelli, Angelica Di Domenico, Carlo Mina e Monica Treppiedi, il già direttore di scuola elementare Claudio Poretti e la docente-ricercatrice in didattica della matematica Monica Panero. È stato inoltre chiesto a tutti i docenti di scuola elementare del Canton Ticino di collaborare al progetto inviando il materiale ritenuto didatticamente efficace. Tale materiale è stato catalogato, revisionato e utilizzato quale stimolo per nuove produzioni. Si è inoltre chiesto all’ergoterapista Lietta Santinelli di presentare alcuni aspetti legati al grafismo e all’introduzione dell’apprendimento numerico in prima elementare, con particolare attenzione agli allievi in difficoltà.

La grafica della piattaforma e di tutti i materiali è opera di Chantal Ambrosini e Sheila Stanga di Officina 103 di Bellinzona.

Lo studio della piattaforma online, nella quale sono direttamente fruibili tutti i materiali MaMa, è stato realizzato da Vanessa Viganò, webmaster del progetto, mentre il Centro di risorse didattiche e digitali (CERDD) si è occupato della realizzazione.

In questo documento si riportano le scelte e l’impostazione adottate in MaMa, esplicitate dal punto di vista teorico, metodologico e didattico, così da consentire un inquadramento del materiale e una sua implementazione in classe.



1. MATERIALI MAMA

Le proposte MaMa, ripartite dalla prima alla quinta elementare (ultimi due anni del I ciclo e II ciclo della scuola dell'obbligo), sono state suddivise in due macro-categorie: materiali per il docente e materiali per l'allievo.

1.1 MATERIALI PER IL DOCENTE

I materiali per il docente, tra i quali rientrano queste linee guida, sono stati progettati per favorire da parte degli insegnanti l'implementazione di attività e percorsi significativi, motivanti e ricchi, legati allo stretto rapporto tra il fare e il pensare.

Queste proposte necessitano della mediazione del docente, che deve strutturarle e renderle operative in base alla specifica realtà d'aula. Quando è stato possibile, nelle proposte MaMa, si è tenuto anche conto di ciò che è avvenuto nella storia della matematica, così da rispettare l'evoluzione degli apprendimenti degli allievi - si riscontrano in effetti analogie tra l'evoluzione storica della matematica e l'acquisizione dei concetti - e da favorire la loro motivazione e curiosità, dando così senso alle proposte didattiche.

Oltre a queste linee guida, i materiali per il docente sono stati suddivisi nelle seguenti cinque micro-categorie: contesti di senso, pratiche didattiche, problemi, giochi e supporti.

1.1.1 CONTESTI DI SENSO

I contesti di senso rappresentano i contesti vicini alla realtà dell'allievo che possono favorire situazioni problema ricche e motivanti.

Il contesto di senso è l'aspetto del mondo reale in cui si situa una situazione problema e che è in relazione con l'individuo, ossia un'esperienza di apprendimento che viene affrontata in chiave problematica. Per la formazione matematica degli allievi è importante farli approcciare con molteplici contesti significativi, stimolanti, vicini ai loro interessi e alla loro quotidianità, così da farli familiarizzare con una matematica non solo formale, ma prossima al loro vissuto. Va infatti considerato che la scelta di strategie e rappresentazioni matematiche spesso dipende dal contesto in cui sorge il problema; abituare gli allievi a diversi contesti aiuta quindi a familiarizzare con diversi approcci.

I contesti possono essere legati alla sfera personale, alla comunità sociale a cui appartiene l'individuo oppure all'applicazione della matematica al mondo reale.

I diversi contesti reali sono luoghi ideali per favorire una situazione problema, che rappresenta il fulcro intorno a cui il docente può sviluppare un percorso progettuale significativo per gli allievi. La situazione problema definisce l'orizzonte di senso condiviso tra insegnante e studenti entro cui strutturare il progetto e prefigura il prodotto (un manufatto, un gioco, una festa, una gita ecc.) atteso da parte degli allievi. Detto in altri termini, la situazione problema da un lato rappresenta un'occasione per porsi delle domande, per interrogarsi sulle proprie risposte, per avviare un percorso di ricerca orientato a costruire delle soluzioni

condivise alle questioni poste; dall'altro prefigura un prodotto verso cui tendere, intorno a cui finalizzare il lavoro e rendere visibile agli altri il proprio percorso di apprendimento.

Una situazione problema non è mai strettamente legata al solo ambito matematico, ma per essere particolarmente significativa, profonda e rivolta alla mobilitazione di competenze, può coinvolgere altri traguardi rientranti in altre discipline, competenze trasversali o contesti di formazione generale.

Approfondimento. Come messo in evidenza dalle linee guida pubblicate dall'OECD (Organisation for Economic Co-operation and Development) in occasione delle rilevazioni PISA 2012, una componente importante della *literacy matematica* risiede nella possibilità che la matematica risulti essere utile per risolvere problemi situati in un contesto. Per literacy matematica si intende la «capacità di un individuo di ragionare matematicamente e di formulare, utilizzare e interpretare la matematica in una varietà di contesti del mondo reale. Essa include concetti, procedure, fatti e strumenti della matematica per descrivere, spiegare e predire fenomeni. Aiuta gli individui a riconoscere il ruolo che la matematica ha nel mondo e a formulare giudizi e decisioni ben fondati, come richiesto a cittadini costruttivi, impegnati e riflessivi del 21° secolo».

Contesti di senso MaMa. I contesti di senso MaMa intendono sollecitare i docenti a valorizzare ambienti di apprendimento che consentano di mettere gli allievi nelle condizioni di affrontare quelle situazioni personali, sociali e culturali che caratterizzano la loro vita e quotidianità. Rappresentano proposte molto ampie che possono essere trattate in continuità; esse coinvolgono i diversi ambiti della matematica e numerose altre dimensioni del Piano di studio: diverse aree disciplinari, competenze trasversali e contesti di formazione generale, con il tentativo di rendere sempre più globale e significativo l'insegnamento in questo livello scolastico. A ciascun contesto è associata almeno una pratica didattica.

Classi a cui è rivolto il contesto.

Ambiti di competenza disciplinari.

Argomenti e contenuti.

Consigli didattici.

Intenti di senso

I NUMERI NELLA REALTÀ

Amato da alcuni, temuto da altri, il numero è un concetto che permea tutta la nostra vita. In questo contesto si intende esplorare il ruolo del numero nella realtà, in particolare nella vita quotidiana, attraverso l'analisi di situazioni problematiche e la riflessione sulle diverse interpretazioni del numero in base al contesto.

Finalità generali:

- comprendere il ruolo del numero nella realtà;
- riconoscere le diverse interpretazioni del numero in base al contesto;
- analizzare le situazioni problematiche in cui il numero è utilizzato;
- riflettere sulle diverse interpretazioni del numero in base al contesto.

Finalità disciplinari:

- comprendere il ruolo del numero nella realtà;
- riconoscere le diverse interpretazioni del numero in base al contesto;
- analizzare le situazioni problematiche in cui il numero è utilizzato;
- riflettere sulle diverse interpretazioni del numero in base al contesto.

Argomenti e contenuti:

- il numero nella realtà;
- le diverse interpretazioni del numero in base al contesto;
- le situazioni problematiche in cui il numero è utilizzato;
- le diverse interpretazioni del numero in base al contesto.

Consigli didattici:

- utilizzare situazioni problematiche in cui il numero è utilizzato;
- riflettere sulle diverse interpretazioni del numero in base al contesto;
- analizzare le situazioni problematiche in cui il numero è utilizzato;
- riflettere sulle diverse interpretazioni del numero in base al contesto.

Finalità generali:

- comprendere il ruolo del numero nella realtà;
- riconoscere le diverse interpretazioni del numero in base al contesto;
- analizzare le situazioni problematiche in cui il numero è utilizzato;
- riflettere sulle diverse interpretazioni del numero in base al contesto.

Finalità disciplinari:

- comprendere il ruolo del numero nella realtà;
- riconoscere le diverse interpretazioni del numero in base al contesto;
- analizzare le situazioni problematiche in cui il numero è utilizzato;
- riflettere sulle diverse interpretazioni del numero in base al contesto.

Argomenti e contenuti:

- il numero nella realtà;
- le diverse interpretazioni del numero in base al contesto;
- le situazioni problematiche in cui il numero è utilizzato;
- le diverse interpretazioni del numero in base al contesto.

Consigli didattici:

- utilizzare situazioni problematiche in cui il numero è utilizzato;
- riflettere sulle diverse interpretazioni del numero in base al contesto;
- analizzare le situazioni problematiche in cui il numero è utilizzato;
- riflettere sulle diverse interpretazioni del numero in base al contesto.

Finalità generali:

- comprendere il ruolo del numero nella realtà;
- riconoscere le diverse interpretazioni del numero in base al contesto;
- analizzare le situazioni problematiche in cui il numero è utilizzato;
- riflettere sulle diverse interpretazioni del numero in base al contesto.

Finalità disciplinari:

- comprendere il ruolo del numero nella realtà;
- riconoscere le diverse interpretazioni del numero in base al contesto;
- analizzare le situazioni problematiche in cui il numero è utilizzato;
- riflettere sulle diverse interpretazioni del numero in base al contesto.

Argomenti e contenuti:

- il numero nella realtà;
- le diverse interpretazioni del numero in base al contesto;
- le situazioni problematiche in cui il numero è utilizzato;
- le diverse interpretazioni del numero in base al contesto.

Consigli didattici:

- utilizzare situazioni problematiche in cui il numero è utilizzato;
- riflettere sulle diverse interpretazioni del numero in base al contesto;
- analizzare le situazioni problematiche in cui il numero è utilizzato;
- riflettere sulle diverse interpretazioni del numero in base al contesto.

Finalità generali:

- comprendere il ruolo del numero nella realtà;
- riconoscere le diverse interpretazioni del numero in base al contesto;
- analizzare le situazioni problematiche in cui il numero è utilizzato;
- riflettere sulle diverse interpretazioni del numero in base al contesto.

Finalità disciplinari:

- comprendere il ruolo del numero nella realtà;
- riconoscere le diverse interpretazioni del numero in base al contesto;
- analizzare le situazioni problematiche in cui il numero è utilizzato;
- riflettere sulle diverse interpretazioni del numero in base al contesto.

Argomenti e contenuti:

- il numero nella realtà;
- le diverse interpretazioni del numero in base al contesto;
- le situazioni problematiche in cui il numero è utilizzato;
- le diverse interpretazioni del numero in base al contesto.

Consigli didattici:

- utilizzare situazioni problematiche in cui il numero è utilizzato;
- riflettere sulle diverse interpretazioni del numero in base al contesto;
- analizzare le situazioni problematiche in cui il numero è utilizzato;
- riflettere sulle diverse interpretazioni del numero in base al contesto.

Descrizione del contesto e delle situazioni problema che possono scaturirvi.

Riferimenti principali al Piano di studio.

1.1.2 PRATICHE DIDATTICHE

All'interno delle pratiche didattiche rientrano attività che permettono lo sviluppo e la mobilitazione di competenze matematiche.

I materiali di questa sezione contengono proposte legate a forme didattiche che tengono in considerazione l'importanza dell'apprendimento attivo e del fare, ossia dell'imparare facendo. Tra le principali forme didattiche prese in considerazione citiamo il *laboratorio matematico* e le *attività a postazioni*. Queste ricche, creative e motivanti pratiche didattiche sono pensate per essere inserite in uno "spazio didattico" privilegiato, dove per gli allievi risulta legittimo il dubbio e il porsi problemi e dove trovano spazio l'invenzione, la progettazione, la creazione, la comunicazione, la riflessione.

In questo senso, gli aspetti che dovrebbero contraddistinguere queste proposte sono soprattutto l'atteggiamento e il modo di pensare e di operare, legati all'esplorazione e al mettersi in gioco. In questo spazio didattico tutto ciò che si fa ha un senso, anche l'errore, dal quale l'alunno può prendere informazioni per individuare possibili strade risolutive. La metodologia proposta per le pratiche didattiche consente di mobilitare, oltre alle risorse cognitive della disciplina, anche i processi previsti dal Piano di studio per l'area matematica e gli aspetti più generali legati alle competenze trasversali e ai contesti di formazione generale, importanti per la crescita del futuro cittadino. In particolare, nelle fasi di sperimentazione e di scoperta che caratterizzano queste pratiche va valorizzata l'importanza del lavoro di gruppo, che rappresenta una ricca occasione per sviluppare competenze trasversali fondamentali per l'apprendimento di tutte le discipline e per lo sviluppo della persona.

Approfondimento. Da diversi anni si è iniziato ad esplorare, in ambito pedagogico e in modo più specifico in didattica della matematica, la forma didattica del laboratorio matematico. Sono diverse le accezioni del concetto di laboratorio, alcune più "restrittive", altre più "ampie", ma che tengono in considerazione tratti comuni, come l'importanza dell'apprendimento attivo e del fare. Nelle accezioni più restrittive il laboratorio è innanzitutto uno spazio diverso dall'aula, un vero e proprio spazio fisico dove viene vissuta l'attività secondo "regole" diverse; tali regole permettono all'allievo di diventare il vero e proprio protagonista del proprio apprendimento. In quelle più ampie, invece, viene definito laboratorio qualsiasi situazione didattica imperniata sul carattere attivo dell'apprendimento e dell'imparare facendo in situazioni stimolanti e ricche, assimilata a un vero e proprio atteggiamento mentale, riscontrabile nel sentirsi in una situazione laboratoriale.

Le attività a postazioni, dette anche atelier, rientrano in una forma didattica che non è più rivolta alla scoperta, quanto all'allenamento e al consolidamento di saperi e abilità già acquisiti. Nell'aula vengono predisposte diverse postazioni e in ognuna sono proposte varie attività, motivanti e ludiche, che possono essere differenziate su più livelli di difficoltà tramite la variazione delle consegne o del materiale a disposizione. I bambini sono attivi e lavorano simultaneamente, si muovono all'interno dello spazio scegliendo quali attività svolgere o rispettando le indicazioni date dal docente. Quest'ultimo, invece, riveste il ruolo di regista e, non essendo direttamente implicato nella gestione del gruppo, può ritagliarsi momenti privilegiati per interagire con il singolo allievo o per osservarne i comportamenti.

Pratiche didattiche MaMa. Le pratiche didattiche MaMa rappresentano il cuore del progetto, la vera ricchezza di ciò che è possibile implementare in aula per questo livello scolastico. Si è scelto di non fornire una sequenza rigida di attività da proporre, ma spunti e idee che il docente può personalizzare e implementare a seconda del contesto di classe, anche grazie all'aiuto di eventuali Allegati e della sezione Supporti.

Le pratiche possiedono una forte componente intradisciplinare (coinvolgendo spesso diversi ambiti di competenza della matematica), interdisciplinare e multidisciplinare (coinvolgendo spesso più discipline), e sono state progettate cercando di tenere in considerazione le componenti più trasversali della formazione. All'interno delle pratiche didattiche si trovano diverse proposte molto brevi che possono essere in certi casi ripetute più volte per rafforzare l'apprendimento degli allievi, e veri e propri percorsi didattici che possono anche durare l'intero anno scolastico.

Alcune pratiche sono collegate ai contesti di senso, altre trovano invece un'applicazione diretta tramite le schede didattiche degli allievi. Alle pratiche, quando è utile, vengono uniti anche degli Allegati che aiutano i docenti nella loro realizzazione. In alcuni casi tali Allegati sono anche editabili.

Classi a cui è rivolta la pratica didattica.

Ambiti di competenza disciplinari.

Icone relative agli aspetti di competenza prevalenti.

Finalità generali.

Argomenti e contenuti.

Descrizione della pratica didattica con le specifiche attività.

Riferimenti principali al Piano di studio.

1.1.3 PROBLEMI

All'interno di questa sezione rientrano proposte didattiche su varie tipologie di problemi e con diversi approcci alla loro comprensione, rappresentazione e risoluzione.

Il tema dei problemi e della loro risoluzione è tipico e ricorrente nell'arco dell'intera storia del genere umano; risolvendo problemi sono state fatte scoperte che hanno cambiato il corso della storia o sono stati inventati manufatti che utilizziamo ancora oggi.

Nell'ambito della pratica didattica, il tema dei problemi rappresenta una delle sfide più significative della matematica. Attualmente in tutto il mondo, uno dei principali obiettivi dell'educazione matematica è di sviluppare negli allievi la competenza relativa al saper applicare la matematica per comprendere e risolvere problemi e situazioni problema reali. Va però considerato che ciò richiede diverse competenze, non solo matematiche, ma anche linguistiche e trasversali: occorre saper comprendere il testo del problema, e dunque conoscere quanto espresso (le singole parole e il significato globale della situazione); saper scegliere un piano strategico che tenga conto dei legami che intercorrono fra le varie informazioni; saper trasporre nel linguaggio della matematica le informazioni linguistiche date dal contesto; saper sviluppare il piano scelto applicando regole, algoritmi e procedure;

saper verificare il risultato, per cui si richiede di esaminare la soluzione ottenuta e di procedere alla sua interpretazione rispetto al contesto iniziale; saper ritornare sui propri passi in caso di incongruenza tra risultato e contesto iniziale, ossia essere in grado di perseverare alla ricerca di un nuovo processo risolutivo o di un nuovo risultato. Occorre quindi che l'allievo abbia sviluppato un'efficiente attività metacognitiva, cioè la capacità di riflettere su ciò che sta facendo e su come lo sta facendo, riuscendo a gestire i processi decisionali.

Approfondimento. È importante distinguere che cosa si intende per *situazione problema*, *problema* ed *esercizio*.

- Una situazione problema può essere assimilata a un percorso progettuale significativo per gli allievi, in grado di suscitare in loro interesse e adesione, rendendoli i veri protagonisti e inducendoli a mobilitarsi per ideare strategie e una o più conseguenti soluzioni.
- Un problema è una proposta nuova, a volte anche semplicemente un testo linguistico, che risulta non conosciuta dall'allievo e che richiede una ricerca da parte del solutore, in quanto coinvolge l'uso di più regole (alcune anche in via di esplicitazione), o la successione di procedimenti la cui scelta è un atto strategico, creativo, dell'allievo stesso. La risoluzione di problemi è pensata per favorire un nuovo apprendimento.
- Un esercizio è invece una proposta in cui si richiede l'applicazione di un metodo già acquisito e l'utilizzo di regole già apprese e in via di consolidamento; rientra quindi nel rafforzamento e allenamento dell'apprendimento già avvenuto.

Una stessa proposta può dare luogo a un problema o a un esercizio a seconda del livello scolastico o delle competenze del singolo allievo. Se si consegna a un allievo un oggetto circolare (ad esempio, un disco) e si chiede di valutare la lunghezza del suo contorno, questa richiesta rappresenta un problema in prima elementare, mentre dovrebbe essere un "banale" esercizio in quarta media. Inoltre, va considerato che la stessa proposta o lo stesso testo, nella stessa classe, può rappresentare un esercizio per alcuni allievi e un problema per altri. Occorre quindi aver consapevolezza di tale distinzione e conoscere a tal punto gli allievi da saper personalizzare le proposte, in modo da fornire a ciascun allievo un problema (se si vuole cercare di far acquisire nuovi saperi) o un esercizio (se si vuole far consolidare un apprendimento).

Problemi MaMa. In questa sezione sono disponibili proposte che cercano di favorire una grande varietà di tipologie testuali e diversi approcci da proporre agli allievi, tenendo conto che modelli di problema diversi portano a processi risolutivi differenti, e di conseguenza a una competenza più ricca e profonda.

Ciò che viene presentato tiene conto che il traguardo a cui si mira è di formare bravi risolutori di problemi non solo in ambito matematico, ma anche nella vita di tutti i giorni. I problemi vengono presentati nella parte del materiale del docente dove vengono esplicitati approcci innovativi e aspetti da considerare, ma un'ampia varietà di problemi è anche inserita all'interno delle schede per l'allievo, insieme a esercizi di consolidamento. Quando è utile, i problemi vengono corredati di Allegati che aiutano i docenti nella loro messa in pratica.

*Riferimenti principali
al Piano di studio.*

Allegati con materiale da adattare e utilizzare con gli allievi.

1.1.4 GIOCHI

In questa sezione rientrano attività ludiche, accompagnate dal materiale, per imparare la matematica giocando.

Il gioco ha rappresentato in ogni epoca e per le diverse culture una potente forma di apprendimento, confronto, collaborazione e comunicazione.

L'infanzia, infatti, si "misura" costantemente con la realtà attraverso il gioco: un mezzo potente ed efficace per entrare in relazione con il mondo circostante e per acquisire nuove competenze disciplinari e trasversali, con approcci diversi per ogni fase della crescita. Grazie al gioco è possibile gettare le basi di una vera e propria competenza in matematica che si riconosce quando un individuo vede il mondo, lo interpreta e agisce sfruttando tale capacità di approccio e di pensiero. Inoltre, tramite il gioco matematico è possibile evitare che si crei quella distanza tra gli allievi e la matematica, che si genera con una didattica troppo fredda e distaccata dagli interessi e dai bisogni degli allievi. Va infatti considerato che il tipo di apprendimento insito nel gioco presenta diversi vantaggi: è accattivante e stimolante per l'allievo, grazie alla sorpresa che un risultato inatteso può favorire; è socializzante, perché spesso per vincere un gioco occorre lavorare in modo efficace con gli altri; è rassicurante, essendo una modalità conosciuta dagli allievi; è efficace, in quanto fa sentire gli alunni protagonisti e autori attivi del proprio sapere; è infine formativo, in quanto il gioco è spesso legato all'apprendimento strategico.

Approfondimento. Dal punto di vista formativo, il gioco svolge certamente una funzione strutturante nello sviluppo della personalità del bambino. Molti sono infatti gli psicologi (Piaget, Vygotskij, Bruner solo per citarne alcuni) che hanno visto in esso la principale forma di apprendimento, attribuendogli aspetti fondamentali per la crescita dell'individuo. Sono tanti anche i pedagogisti, i didatti o altre figure che ne hanno esaltato le diverse potenzialità, al di là dell'apprendimento: giocando, l'essere umano si sviluppa, impara a esplorare e a provare in un ambiente in cui è lecito l'errore; è stimolato alla dimensione sociale, all'autonomia personale, alla cooperazione, al rispetto delle regole e dell'altro, a perseverare nelle attività complesse nonostante la frustrazione, accettando la sconfitta e decidendo di voler giocare ancora. Tutte componenti che risultano fondamentali per diventare competenti in ambito matematico.

Giochi MaMa. I giochi MaMa sono pensati per favorire in modo ludico il conseguimento di diversi traguardi specifici di apprendimento in ambito matematico e delle competenze trasversali. Si è scelto di privilegiare giochi classici, di sicuro successo, facilmente implementabili in aula e accattivanti per gli allievi. Alcuni sono inseriti all'interno delle pratiche, altri, che coinvolgono materiali concreti prodotti e impaginati da MaMa, rientrano nella sezione specifica "Giochi". In questa sezione le descrizioni dei giochi sono accompagnate da un box in cui vengono esplicitate le informazioni principali (numero di giocatori, durata media, complessità, strategia) e, in molti casi, da Allegati che aiutano i docenti nella realizzazione. Quando il gioco lo consente, nella descrizione viene anche esplicitato come è possibile modificare e adattare i giochi in funzione delle esigenze, delle competenze e dell'età dei bambini.

Classi a cui sono rivolti i giochi.

Ambiti di competenza disciplinari.

Indicazioni per varianti del gioco.

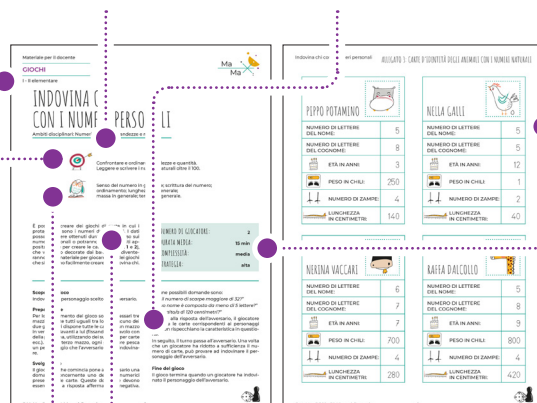
Allegati con materiale da adattare e utilizzare con gli allievi.

Finalità generali.

Indicazioni su numero di giocatori, durata, complessità e strategia.

Argomenti e contenuti.

Descrizione delle regole del gioco.



1.1.5 SUPPORTI

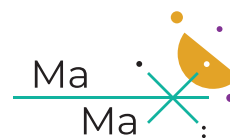
In questa sezione rientra il materiale concreto di supporto alle attività: documenti e immagini che possono essere di supporto ai docenti per progettare esperienze didattiche (monete e banconote, sviluppi di solidi, schede per il grafismo ecc.). Si tratta di un servizio agli insegnanti che permette di rintracciare facilmente supporti utilizzabili in classe per esigenze di varia natura.

1.2 MATERIALI PER L'ALLIEVO

I materiali per l'allievo sono stati progettati per essere utilizzati direttamente dai bambini. Si tratta di schede didattiche, in formato .PDF, differenziabili in base alle competenze degli allievi. Le schede didattiche sono suddivise per ambito di competenza, anno/i scolastico/i, argomenti ed eventuali contenuti specifici. All'interno della piattaforma è inoltre possibile effettuare una ricerca per parole chiave, così da rintracciare le schede relative a un determinato tema inerente o meno il mondo della matematica.

Differenziazione delle schede. Le schede per l'allievo sono scaricabili dal docente in versione digitale e sono modificabili e differenziabili, attraverso l'editor per pdf Adobe Acrobat, in base alle competenze degli studenti. Nelle schede è possibile riformulare le consegne, i testi dei problemi e degli esercizi e gli inserti teorici; è inoltre possibile agire sul campo numerico degli esercizi e, in alcuni casi, modificare le quantità delle collezioni illustrate: questo permette al docente di complicare o di facilitare le richieste a seconda delle esigenze degli allievi, mantenendo la stessa tipologia di problema o di esercizio e un layout comuni per tutti. È inoltre possibile decidere se mantenere o nascondere le icone che indicano gli aspetti di competenza prevalentemente coinvolti in determinate attività, semplicemente cliccandoci sopra.

Tramite la differenziazione del materiale è possibile instaurare una dinamica di apprendimento progressivo che tiene conto della diversità di ogni singolo allievo in relazione al suo stile e al tipo di intelligenza che prevale nel processo di apprendimento, alla facilità e difficoltà di apprendimento, alle esperienze sociali. Si è scelto di non creare una serie di schede già differenziate a priori, non potendo tener conto delle reali competenze del singolo, ma di lasciare al docente la possibilità di farlo in base alla realtà d'aula, considerando che solo lui è il vero regista dell'apprendimento scolastico.



2. ATTINENZA CON IL PIANO DI STUDIO

Le proposte MaMa sono impostate sulla base del Piano di studio, al quale fa esplicito riferimento. In particolare, sono state implementare le scelte descritte di seguito.

- Suddivisione nei tre *ambiti di competenza* previsti per il I e il II ciclo della scuola dell'obbligo: *Numeri e calcolo*, *Geometria*, *Grandezze e misure* (scelta attuata per tutto il materiale: docente e allievo).

AMBITI DI COMPETENZA

Numeri e calcolo

Nella scuola elementare gli oggetti di studio in questo ambito sono i vari concetti numerici, le proprietà delle operazioni con le loro applicazioni nel calcolo e la struttura dell'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ e dell'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$. Il calcolo trova la sua principale ragione d'essere nei processi risolutivi di problemi e situazioni problema.

Geometria

Questo ambito ha come oggetto di studio le figure e le loro proprietà viste secondo due ottiche: la geometria sintetica, che si focalizza sugli aspetti qualitativi delle figure, e la geometria metrica, che si occupa di quelli quantitativi. Quest'ultimo aspetto è principalmente trattato nell'ambito Grandezze e misure per quanto concerne i concetti di grandezza, misura, unità di misura e relazioni esistenti fra di essi.

Grandezze e misure

Questo ambito permette di comprendere come individuare, descrivere, definire, interpretare, stimare, misurare e comparare grandezze di oggetti e di fenomeni del mondo reale. In particolare, occorre acquisire le conoscenze che gravitano attorno ai concetti di grandezza, misura, unità di misura, oltre naturalmente alle procedure di calcolo di alcune grandezze e di conversione fra misure espresse secondo unità diverse. Tale ambito è strettamente correlato con gli aspetti numerici e geometrici. Oltre alle misure e alle grandezze geometriche (lunghezza, area, volume, ampiezza) sono da prendere in considerazione capacità, massa, tempo, valore monetario e altre che possono emergere dalle situazioni affrontate.

- Esplicito richiamo ai *traguardi di competenza* di matematica a cui tendere alla fine di ciascun ciclo (scelta attuata per contesti di senso, pratiche didattiche e problemi).

TRAGUARDI DI COMPETENZA

Alla fine del I ciclo l'allievo:

- conosce e utilizza i numeri naturali almeno fino a 100 in contesti legati principalmente al quotidiano e sa effettuare ordinamenti, stime, conteggi di raccolte alla sua portata numerica;
- esegue calcoli mentali e mentali-scritti che coinvolgono addizioni almeno fino al 100 e sottrazioni in casi più semplici;
- riconosce, denomina e descrive le più comuni figure del piano e dello spazio, oltre a semplici relazioni e strutture legate alla lettura della realtà che lo circonda;
- sa situarsi nel tempo della vita quotidiana, nella ciclicità e ricorsività;
- confronta, classifica e ordina lunghezze legate alla sua realtà ed effettua nel concreto misure per confronto con una grandezza scelta come unità;
- esplora, comprende, prova e risolve situazioni-problema contestualizzate legate al vissuto e alla realtà che coinvolgono i primi apprendimenti in ambito numerico, geometrico e relativi a grandezze riferite alla sua quotidianità;
- progetta e realizza rappresentazioni e modelli non formalizzati legati all'interpretazione matematica del mondo che lo circonda;
- presenta, descrive e motiva le proprie scelte prese per affrontare una semplice situazione matematica legata alla realtà in modo tale che risultino comprensibili ai compagni, come pure comprende le descrizioni e presentazioni degli altri;
- manifesta un atteggiamento positivo rispetto all'apprendimento quando si affrontano esperienze relative alla matematica.

Alla fine del II ciclo l'allievo:

- conosce e utilizza i numeri naturali, i numeri decimali e le frazioni in contesti reali e ideali; sa ordinare i numeri naturali e decimali;
- esegue con sicurezza il calcolo mentale e mentale-scritto che coinvolge le quattro operazioni con numeri naturali e sa effettuare calcoli con numeri decimali, eventualmente anche ricorrendo a una calcolatrice in situazioni che lo richiedono;
- ricava e interpreta informazioni da tabelle e grafici; elabora, interpreta e rappresenta insiemi di dati forniti o ricercati;
- esprime valutazioni probabilistiche in alcune semplici situazioni di incertezza legate al vissuto;
- riconosce, denomina, descrive e rappresenta figure (del piano e dello spazio), relazioni e strutture legate all'interpretazione della realtà o a una loro matematizzazione e modellizzazione;

- classifica le principali figure del piano in base a caratteristiche geometriche;
- confronta, classifica e ordina le più comuni grandezze ed effettua e calcola misure dirette e indirette legate alla realtà e a situazioni ideali ancorate nel concreto;
- determina misure significative delle principali figure del piano;
- comprende e risolve con fiducia e determinazione situazioni-problema in tutti gli ambiti di contenuto previsti per questo ciclo, legate al concreto o astratte ma partendo da situazioni reali, mantenendo il controllo critico sia sui processi risolutivi sia sui risultati, esplorando e provando diverse strade risolutive;
- costruisce ragionamenti, fondandosi su ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista di altri;
- legge e comprende testi che coinvolgono aspetti logici e matematici concernenti gli ambiti coinvolti in questo ciclo;
- utilizza strumenti, convenzionali e non, per affrontare una situazione, in particolare strumenti per il disegno tecnico (riga, compasso, squadra) e strumenti di misura (metro, contenitore graduato, goniometro ecc.);
- progetta e realizza rappresentazioni e modelli di vario tipo, matematizzando e modellizzando situazioni reali impregnate di senso;
- riconosce e utilizza rappresentazioni diverse di uno stesso oggetto matematico;
- comunica e argomenta procedimenti e soluzioni relative a una situazione, utilizzando diversi registri di rappresentazione semiotica; comprende, valuta e prende in considerazione la bontà di argomentazioni legate a scelte o processi risolutivi diversi dai propri;
- manifesta un atteggiamento positivo rispetto alla matematica, tramite esperienze significative che gli permettano di cogliere in che misura gli strumenti matematici che ha imparato a utilizzare siano utili per operare nella realtà.

- Suddivisione per ciascun ambito di competenza in *argomenti* e *contenuti* più specifici, rintracciabili nei traguardi specifici di apprendimento previsti dal Piano di studio (scelta attuata per tutto il materiale: docente e allievo).

Ciascun ambito è stato suddiviso in argomenti che lo caratterizzano, allo scopo di facilitare la consultazione da parte del docente e, dove necessario, in contenuti di approfondimento. Le schede degli allievi possono quindi rientrare nell'argomento più generale o in uno o più contenuti specifici.

In queste linee guida per ogni argomento e contenuto vengono presentati dei cenni legati al sapere in gioco adatti per la scuola elementare, con eventuali approfondimenti utili per la trasposizione didattica, aspetti didattici per comprendere l'impostazione scelta in MaMa ed eventuali aspetti storici importanti per cogliere l'evoluzione del concetto, che si manifesta anche nell'acquisizione del sapere da parte degli allievi in classe.

ARGOMENTI E CONTENUTI

Si riporta l'elenco degli argomenti e dei contenuti previsti per Numeri e calcolo:

Senso del numero

- Funzioni del numero
- Stima

Conteggio

- Corrispondenza biunivoca
- Conta
- Enumerazione

Sistema numerico decimale

- Scrittura del numero
- Raggruppamenti
- Altri sistemi numerici

Ordinamento

Successioni

Sottoinsiemi dei numeri naturali

- Pari e dispari
- Numeri primi

Interpretazioni dei numeri razionali

- Frazioni
- Numeri decimali

Operazioni

- Addizione
- Sottrazione
- Moltiplicazione
- Divisione
- Strategie di calcolo

Grafici e tabelle

Combinatoria e probabilità

- Esplicito richiamo alle diverse dimensioni disciplinari allo scopo di favorire percorsi interdisciplinari, pluri e multidisciplinari (scelta attuata per contesti di senso, pratiche didattiche e problemi).

DIMENSIONI DISCIPLINARI

Sono state create le seguenti quattro icone per rappresentare le diverse aree disciplinari specifiche per la scuola elementare che sono coinvolte nel progetto MaMa.



Area
lingue



Studio
dell'ambiente



Area
arti



Area
motricità

- Esplicito richiamo alle competenze trasversali e ai contesti di formazione generale per la formazione del futuro cittadino (scelta attuata per contesti di senso, pratiche didattiche e problemi).

- Esplicito richiamo ai sei aspetti di competenza (scelta attuata per le pratiche didattiche e per il materiale per l'allievo):

- le risorse cognitive: *Sapere e riconoscere, Eseguire e applicare;*
- i processi cognitivi: *Esplorare e provare, Matematizzare e modellizzare, Interpretare e riflettere sui risultati, Comunicare e argomentare.*

ASPETTI DI COMPETENZA

Di seguito si riporta la descrizione dei sei aspetti di competenza.

Sapere e riconoscere

Comprende gli apprendimenti relativi alla padronanza di conoscenze degli oggetti matematici in gioco e del loro significato, sia di tipo dichiarativo sia procedurale. In particolare, il riconoscere comprende il saper distinguere oggetti matematici in base ai loro elementi, proprietà, relazioni e rappresentazioni, sulla base delle conoscenze acquisite.

Eseguire e applicare

Comprende quegli aspetti del saper fare legati all'esecuzione, automatica e non, di procedimenti e algoritmi, che possono prevedere l'intervento consapevole e richiedere il riconoscimento della situazione e un adattamento alla stessa. In particolare, eseguire calcoli, trasformazioni e costruzioni con o senza mezzi ausiliari, applicare procedimenti e concetti disciplinari specifici dei vari ambiti di competenza a concrete situazioni matematiche.

Esplorare e provare

Esplorare con fiducia e determinazione situazioni matematiche non note, provare ad affrontarle per tentativi ed errori, individuare strategie e procedimenti interpretativi e risolutivi, formulare congetture e verificarle o confutarle attraverso verifiche, ragionamenti o produzione di controesempi.

Matematizzare e modellizzare

Utilizzare concetti, principi e metodi specifici della matematica per comprendere, spiegare, esaminare domini reali o ideali. Descrivere e rappresentare tali domini con modelli che utilizzano in modo consapevole il linguaggio della matematica e che possono essere espressi tramite diverse forme di rappresentazione.

Interpretare e riflettere sui risultati

Comprendere e assumere un atteggiamento critico di fronte a un procedimento, una strategia o un risultato, ottenuti personalmente o proposti da altri, mettendo in atto strategie di verifica della loro attendibilità, di pertinenza con le condizioni della situazione problema affrontata e di applicabilità in situazioni nuove.

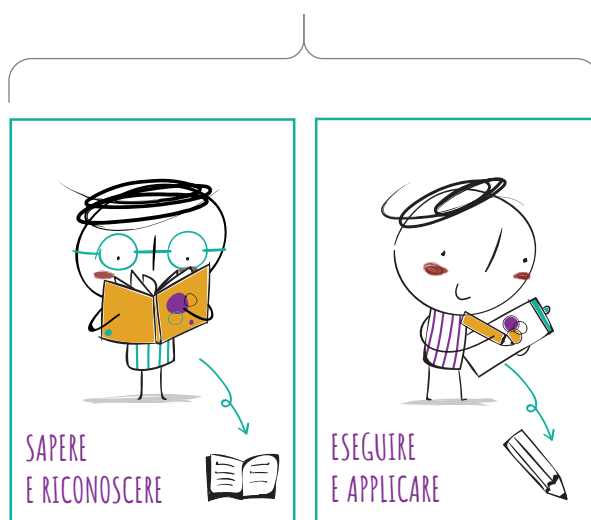
Comunicare e argomentare

Presentare, descrivere, motivare, argomentare e giustificare in diversi registri semiotici (linguistico, aritmetico, algebrico, pittorico, iconico, grafico, gestuale ecc.) convinzioni, proprietà, riflessioni, ragionamenti, scelte e conclusioni concernenti un procedimento o un concetto matematico propri o di altri, in modo adeguato in rapporto all'oggetto considerato e al contesto d'uso.

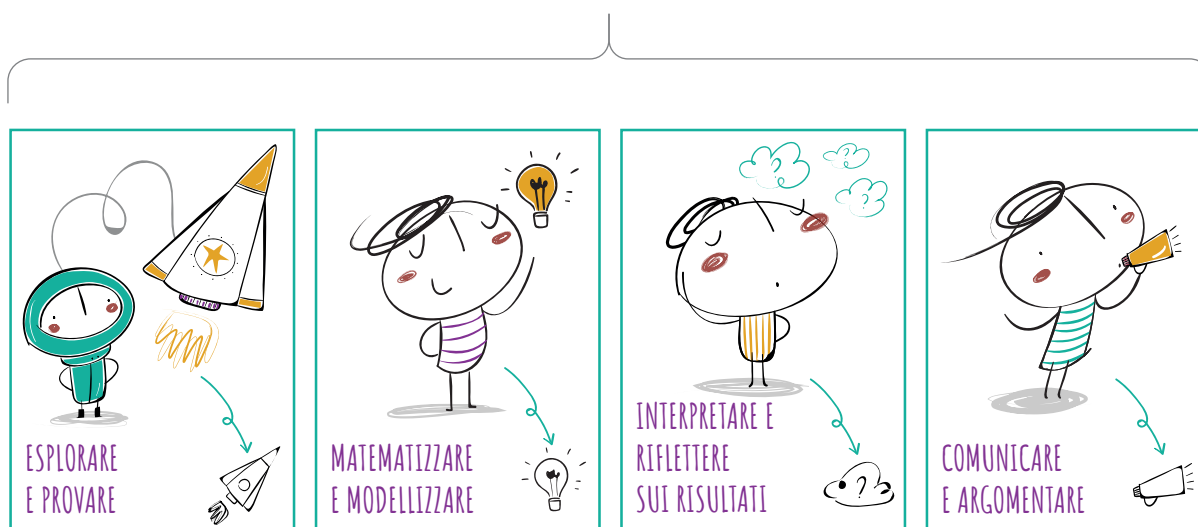
Per rendere più operativo e significativo con gli allievi l'aggancio con gli aspetti di competenza, in particolare con i processi cognitivi, che rappresentano uno degli elementi più innovativi del Piano di studio, sono state individuate sei icone, una per ciascun aspetto di competenza. Ogni icona illustra un personaggio che compie un'azione, evocando così un aspetto di competenza in cui gli allievi possono facilmente immedesimarsi. Delle icone esistono due versioni: una che illustra l'azione realizzata dal personaggio e l'altra che rimanda ad un particolare dell'azione, l'oggetto caratterizzante. Tale scelta è dettata dalla volontà di fornire agli allievi gli strumenti necessari per orientare il loro lavoro, favorendo la riflessione metacognitiva, l'acquisizione e l'attivazione di risorse e processi cognitivi e di atteggiamenti adeguati alla situazione matematica con cui sono confrontati. Per familiarizzare con tali icone si rimanda alla pratica didattica "Alla scoperta degli aspetti di competenza".

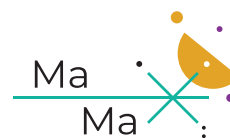
Di seguito le icone relative agli aspetti di competenza:

Risorse cognitive



Processi cognitivi





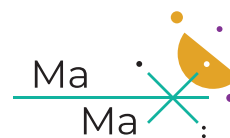
3. COME UTILIZZARE MAMA

MaMa è un materiale pensato per fornire proposte concrete per l'ideazione e la realizzazione di innovativi percorsi didattici, sostenendo il lavoro progettuale del docente senza tuttavia volersi sostituire al suo fondamentale ruolo.

Prendendo spunto dai materiali MaMa, il docente potrebbe progettare le attività in classe a partire da un contesto di senso nel quale far nascere una significativa situazione problema, così da favorire la partecipazione attiva da parte degli allievi. A questa situazione problema vanno agganciate pratiche didattiche, problemi, giochi e schede personalizzate, così da alternare momenti di scoperta ad altri di consolidamento e allenamento del sapere in gioco, tenendo conto del contesto reale nel quale ci si trova a operare. È grazie alla condivisione di senso iniziale che le fasi di allenamento acquistano maggiore significato per l'intero gruppo classe.

Sono infatti gli alunni i veri protagonisti della situazione problema, mentre il docente svolge il ruolo di osservatore, allo scopo di individuare i loro punti di forza e di difficoltà. Vengono così identificati gli argomenti da riprendere, consolidare o istituzionalizzare negli altri momenti formativi, così da acquisire le conoscenze e le abilità necessarie per giungere al prodotto atteso. A questo scopo il docente può selezionare e alternare le varie forme didattiche proposte da MaMa durante il percorso. Lo stesso schema può essere riproposto varie volte durante l'anno scolastico.

Non c'è quindi un'unica via da seguire da parte dei docenti, e neppure una suddivisione temporale rigida delle proposte, ma una certa elasticità lasciata al docente così che possa personalizzare la programmazione in base al proprio stile, al proprio gusto e alle proprie esigenze, tenendo ovviamente conto degli interessi e dei bisogni dei propri allievi.



4. AMBITO NUMERI E CALCOLO

Si riportano di seguito le descrizioni teoriche e didattiche degli argomenti e dei contenuti previsti per l'ambito *Numeri e calcolo*.

4.1 SENSO DEL NUMERO

La comprensione e la gestione dell'universo numerico rappresenta senza dubbio una delle più complesse e affascinanti conquiste dell'essere umano.

L'espressione *senso del numero* si è diffusa fin dagli anni '80 per indicare l'insieme di conoscenze e abilità relative ai numeri e alle operazioni che permette ad un individuo di gestire in modo flessibile ed efficace svariate situazioni matematiche, in contesti di vita quotidiana o più astratti. È tramite la proposta di numerose esperienze da far vivere agli allievi che è possibile sviluppare il senso del numero.

Approfondimenti. All'interno di questo argomento si possono individuare tre domini di applicazione tra loro fortemente interconnessi: numerico, delle operazioni e della risoluzione di problemi.

Il dominio numerico riguarda lo sviluppo di un'adeguata percezione della grandezza dei numeri in senso relativo (per confronto con altri numeri) o assoluto, e il saper gestire rappresentazioni diverse dei numeri (ad esempio le rappresentazioni pittoriche, iconiche, simboliche).

Il dominio delle operazioni è relativo alla comprensione dell'effetto delle operazioni sui vari tipi di numeri, l'individuazione delle relazioni tra di esse e delle loro proprietà.

Il terzo dominio rappresenta l'applicazione dei primi due alla risoluzione di problemi. Tale competenza, per quanto concerne il senso del numero, richiede la capacità di stabilire quali dati risultano significativi, se è più appropriato un calcolo esatto o approssimato, la consapevolezza dell'esistenza di più strategie, la capacità di scegliere le rappresentazioni numeriche e i metodi di calcolo più efficienti, nonché un'attitudine alla revisione dei dati e dei risultati di un problema per verificarne il senso.

Per poter risolvere un problema in modo efficace ed efficiente, a queste competenze specifiche si aggiungono quelle linguistiche, strategiche e metacognitive necessarie per affrontare un testo problematico.

Aspetti didattici. Il senso del numero si sviluppa nel tempo tramite esperienze personali e il progredire dell'apprendimento matematico. Per questo motivo l'approccio seguito in MaMa mette l'allievo nelle condizioni di poter vivere proposte ricche e variate. Tale argomento è da considerarsi trasversale per quanto concerne l'ambito Numeri e calcolo, ma in MaMa si considerano alcune proposte rientranti nell'argomento in generale e altre che fanno riferimento alle *Funzioni del numero* e alla *Stima*, ritenute altrettanto importanti per acquisire un buon senso del numero.

4.1.1 FUNZIONI DEL NUMERO

Questo contenuto è prettamente legato al numero nell'ambito del quotidiano, dato che il bambino nel suo contesto di vita è confrontato in modo ricorrente con innumerevoli esperienze in cui i numeri sono presenti: negli orologi, nelle targhe, nei calendari, nei soldi, nei prezzi sui prodotti, nei programmi televisivi, nel telecomando, nel telefono, nei numeri civici, nei giochi di società ecc. Quello che viene proposto in classe risulta quindi in sintonia con questo capitale di esperienze e ne beneficia in modo rilevante.

Le principali funzioni del numero nel contesto reale sono le seguenti:

- *Conta orale*: è la sequenza convenzionale delle parole numero (cantilena o filastrocca dei numeri).
- *Cardinale*: indica quanti elementi ci sono in una raccolta.
- *Ordinale*: indica la posizione di un elemento in una sequenza ordinata.
- *Etichetta*: è solo un nome che può essere sostituito da un qualsiasi altro, ad esempio il nome di un colore.
- *Misura*: indica quante volte una certa unità di misura è contenuta in una data grandezza. È quel numero che da solo non dice niente, ma va accompagnato dall'unità di misura.
- *Ricorsiva*: è l'idea, legata alla cantilena dei numeri, che dopo un numero ce n'è un altro, senza fine.
- *Simbolica*: scrittura dei simboli utilizzati per denotare i numeri (numerali).

Aspetti didattici. L'approccio seguito si colloca in continuità con quanto si svolge nella scuola dell'infanzia, dove l'universo del numero trova ampie applicazioni nel gioco, nelle domande e nei problemi che nascono dall'esperienza concreta. È lecito allora pensare che i bambini in questo assiduo contatto con i numeri scritti e detti, derivanti da sollecitazioni scolastiche ed extrascolastiche, costruiscano delle conoscenze al riguardo prima di iniziare la scuola elementare. Gradualmente gli allievi acquistano così competenze sulle diverse funzioni del numero come cardinale, ordinale, sul cosiddetto numero-etichetta, sul numero-valore del denaro, sul numero nell'uso relativo al tempo, sul numero come espressione di una misurazione, addirittura sul numero da un punto di vista ricorsivo. All'ingresso della scuola elementare, l'allievo può essere quindi confrontato con situazioni ricche, aperte, motivanti, legate al vissuto, che contemplano diverse funzioni del numero, che possono coinvolgere anche numeri "grandi" (dove il grande dipende dal contesto della classe e del singolo allievo) e che possono da subito prendere in considerazione anche lo zero.

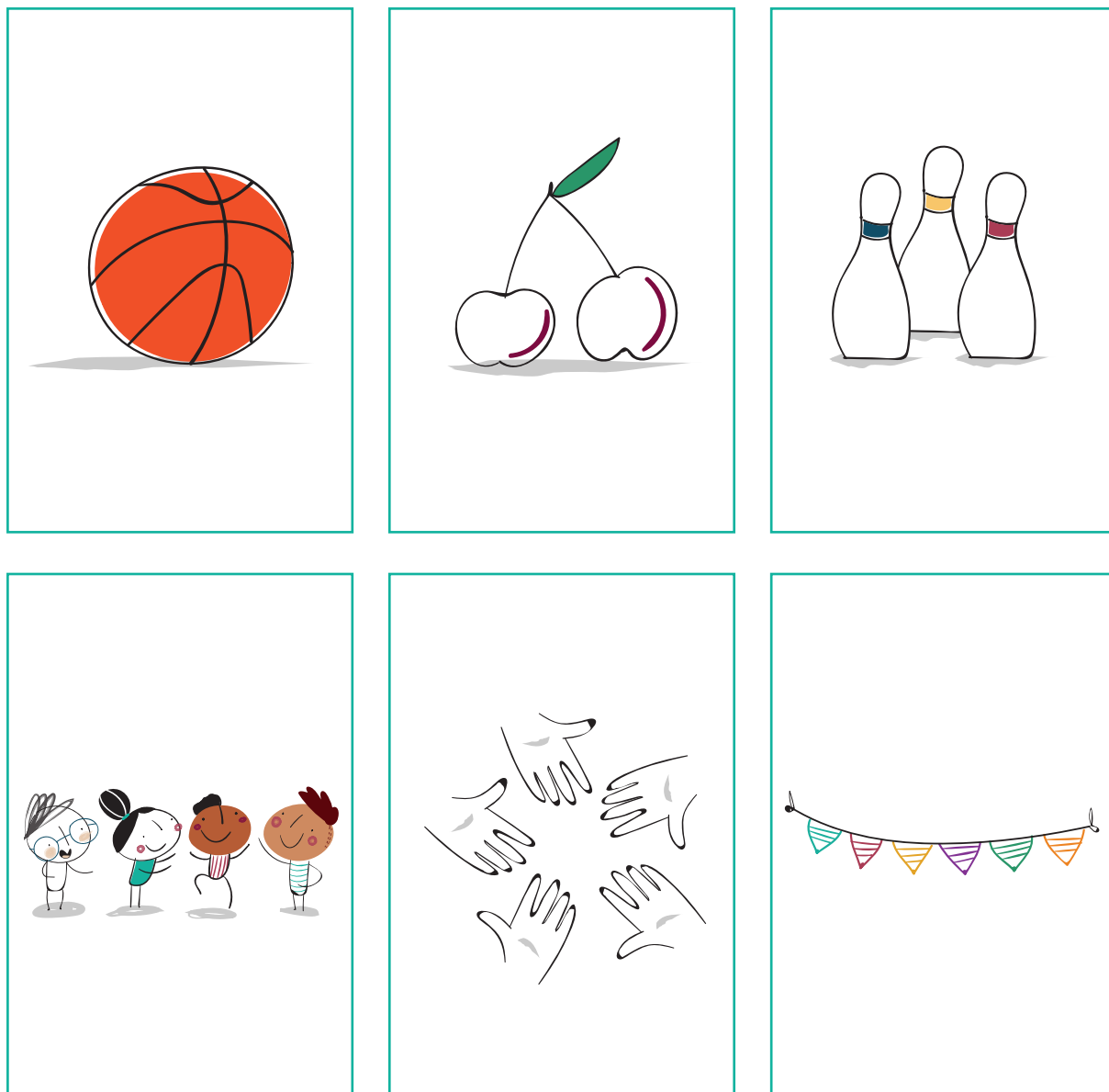
L'ottica è di mettere gli allievi nella condizione di vivere e confrontarsi con la scoperta del variegato universo numerico, cercando di evitare una precoce e forzata formalizzazione in termini di rappresentazioni, simboli e algoritmi, quando i bambini non sono ancora in grado di acquisirli e padroneggiarli.

Nel secondo ciclo le diverse funzioni del numero vengono riprese in modo sempre più profondo, andando alla ricerca di significative situazioni del mondo reale che consentono di approfondire le diverse funzioni dei numeri appartenenti a insiemi numerici diversi (naturali, razionali e in alcuni casi anche interi).

4.1.2 STIMA

L'elaborazione del numero può essere associata a operazioni di quantificazione, cioè a operazioni cognitive mediate dall'attivazione di una rappresentazione mentale della quantità numerica di tipo analogico, non verbale. I processi di quantificazione non si basano su abilità di conteggio vero e proprio, ma dipendono da altre abilità specifiche: il *subitizing* e la *stima*.

Subitizing. Si tratta di riconoscere “a colpo d’occhio” la quantità presente in un insieme di n elementi, senza ricorrere a veri e propri meccanismi di conteggio verbale. Il subitizing è efficiente solo nei casi di piccole numerosità (4-6 elementi nei soggetti adulti); fino a questo numero di elementi l’essere umano riesce a colpo d’occhio a dire quanti elementi ci sono in una raccolta, senza il bisogno di contarli a uno a uno (basta provare con gli insiemi di oggetti rappresentati nella seguente figura).



La capacità di subitizing dipende da vari fattori legati ad esempio agli oggetti e alla loro disposizione.

Stima. Per le numerosità più grandi, nel nostro sistema di elaborazione del numero entra in gioco un meccanismo parallelo a quello del subitizing, identificato nella stima. Il termine stima in questo contesto fa infatti riferimento al processo di riconoscimento di quantità maggiori di 5-7 elementi. Tale meccanismo è però caratterizzato da una minor accuratezza del risultato.

Approfondimenti. Più in generale, la stima è l'individuazione tramite un procedimento conscio o inconscio del valore indicativo di una quantità o di una grandezza incognita.

Si possono distinguere stime dirette, ottenute “ad occhio” o “a senso”, e indirette, ricavate con il calcolo approssimato.

Un'altra distinzione proposta dalla letteratura è quella tra *stima di numerosità* (che riguarda quantità numeriche), *stima di misurazione* (sia di grandezze continue che discrete) e *stima computazionale* (che si riferisce al risultato di calcoli).

Si nota quindi come tale contenuto risulta trasversale ai vari ambiti e ai diversi argomenti. Per questo motivo in Numeri e calcolo, a parte una raccolta specifica di schede e pratiche didattiche legate alla numerosità di raccolte, si terrà conto di questo contenuto in varie altre parti delle proposte MaMa, ad esempio nell'argomento operazioni.

Nel caso di quantità tipiche della realtà quotidiana o di una grandezza, una buona stima differisce dal valore esatto per meno del 10%, mentre nel caso di grandezze “non familiari” si considera un buon estimatore colui che individua l'ordine di grandezza del valore esatto. Ciò che però risulta familiare per una persona, non è detto che lo sia per un'altra, dato che dipende dall'esperienza di ciascun individuo.

Aspetti didattici. Saper stimare è una lenta conquista che l'allievo può acquisire grazie all'esperienza.

Fin dalla prima elementare è possibile proporre attività di stima legate alle quantità numeriche alla portata degli allievi, per poi verificare tramite il conteggio le proprie previsioni rispetto al numero di elementi in gioco. Con il tempo e l'esperienza è possibile cambiare alcune variabili, come ad esempio le quantità numeriche, la disposizione degli oggetti, l'ordine di grandezza delle quantità, il tempo fornito per effettuare la stima, la possibilità di far fronte a una raccolta di riferimento.

La stima può essere vissuta come una sfida o come un'attività ludica da condividere con gli altri e deve essere proposta periodicamente dal docente, sapendola anche cogliere nelle tradizionali attività di classe. Queste esperienze possono essere riprese e ampliate nel secondo ciclo, favorendo negli allievi lo sviluppo di nuove strategie di esecuzione e di controllo. Ogni contesto può essere adatto per fermarsi e per chiedere agli allievi di stimare, in modo diretto o indiretto, le quantità di oggetti coinvolti, le misure delle grandezze in gioco (lunghezze, aree, ampiezze, volumi, valore monetario, tempo, massa, capacità), l'ordine di grandezza del risultato di un calcolo, o di saper approssimare adeguatamente i dati iniziali di un problema per favorire il processo risolutivo di un calcolo o il risultato finale.

È però importante che ogni allievo faccia la propria stima, semmai scrivendola su un foglio, senza farsi influenzare dagli altri. Il confronto tra la propria stima e il valore esatto, se continuato nel tempo, permette di rafforzare le proprie previsioni e il controllo dei processi messi in atto, ampliando sempre di più le proprie competenze.

Un buon stimatore acquisirà con l'esperienza le seguenti caratteristiche:

- saper scegliere a intuito qual è la strada migliore per effettuare la stima;
- saper trasformare dati numerici astratti o astrusi in qualche cosa di interpretabile;
- essere dotato di buone capacità mentali e matematiche intuitive e spontanee;
- saper usare e coordinare tra loro varie strategie di calcolo mentale;
- saper accettare la presenza di un errore nella sua stima rispetto al valore esatto.

È solo grazie al continuo confronto con le proprie intuitive stime e la successiva verifica con la realtà che lo circonda, che l'“occhio della stima” negli allievi viene raffinato, sviluppando così importanti competenze.



Quanto è alto questo bambino?



Quante persone ci sono in questa foto?

Quelli riportati nelle immagini sono due esempi di stima che richiedono competenze molto diverse tra loro: il primo caso è più vicino al vissuto degli allievi e coinvolge numeri maggiormente alla loro portata, il secondo coinvolge un ordine di grandezza molto distante dalla quotidianità non solo dei bambini, ma anche degli adulti.

4.2 CONTEGGIO

Il contare è un'attività che oggi appare del tutto istintiva, ma vi fu un tempo in cui l'essere umano non sapeva contare, almeno per il significato che oggi assume questa attività, né immaginava che si potesse fare o che avesse senso farlo. È stata una lenta conquista dell'essere umano acquisire il concetto di numero astratto, e in particolare di conteggio di una raccolta di elementi: la stessa conquista che vive un bambino che impara ad associare a una raccolta il numero dei suoi elementi, ossia la sua cardinalità.

Per riuscire a gestire un conteggio è necessario saper coordinare diverse componenti collegate a specifici contenuti matematici:

- la *corrispondenza biunivoca*, ossia il saper associare a ogni elemento di un insieme uno e un solo elemento di un altro insieme e viceversa. Nel contesto del conteggio, si tratta di saper collegare ogni parola-numero con ciascun oggetto da contare;
- la *conta orale*, ossia conoscere le parole-numero specifiche (i nomi dei numeri: uno, due, tre ecc.) della filastrocca o cantilena dei numeri. Competenza che si acquisisce in continuità tra scuola dell'infanzia e scuola elementare;
- l'*enumerazione*, l'azione di organizzazione spaziale di una collezione che permette di percorrerla in maniera controllata e ordinata, ossia di passare una e una sola volta da ogni elemento della collezione;
- la *cardinalità* dell'insieme, che consiste nel comprendere che l'ultima parola-numero pronunciata corrisponde alla numerosità dell'insieme contato.

In aggiunta a queste componenti, inoltre, è necessario anche saper coordinare tutte queste competenze con aspetti percettivo-motori.

Approfondimenti. È interessante osservare che per contare una raccolta di 2 elementi (ros-

so R e verde V), ci sono 2 strade possibili: prima si considera il rosso R e poi il verde V o prima si considera il verde V e poi il rosso R, ossia $2!$ (2 fattoriale: 2×1) strade; per contare una raccolta costituita da 3 elementi (rosso R, giallo G e verde V) ci sono 6 modi diversi: RGV, RVG, GRV, GVR, VRG, VGR), ossia $3!$ (3 fattoriale: $3 \times 2 \times 1$) strade.

Per trovare tutti i modi che esistono per contare gli elementi di una raccolta effettuiamo delle permutazioni ordinate nelle quali ogni oggetto viene considerato una e una sola volta. In generale, per contare quante sono le diverse strade percorribili per enumerare gli n elementi di una raccolta, occorre osservare che il primo elemento della configurazione può essere scelto in n modi diversi, il secondo in $(n - 1)$, il terzo in $(n - 2)$ e così via fino all'ultimo che potrà essere considerato in un solo modo, essendo l'ultimo rimasto. Dunque, si ottiene che esse sono esattamente $n!$ (n fattoriale: $n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 2 \times 1$).

Abbiamo quindi $5!$, ossia 120, modi diversi di enumerare le diverse dita di una mano, e addirittura $3'628'800$ modi per contare le nostre 10 dita. (Per approfondire si veda l'argomento Combinatoria e probabilità).

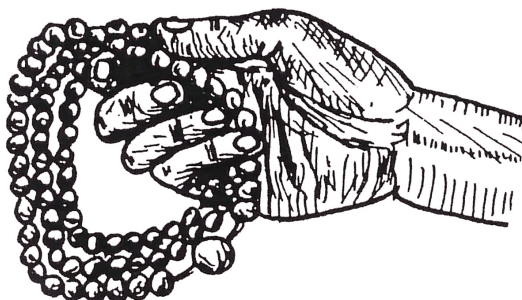
Aspetti didattici. L'attività di conteggio inizia fin da molto piccoli e rappresenta un argomento affrontato frequentemente durante gli anni di scuola dell'infanzia e in ambienti extrascolastici. Gli allievi all'ingresso della scuola elementare hanno così maturato diverse competenze, che variano da alunno ad alunno, e per le quali è necessaria una differenziazione delle proposte che tenga conto delle singole esigenze. Ci sono bambini capaci di gestire il conteggio di raccolte molto numerose, fino a 20 elementi o oltre, e altri che faticano anche con 3 o 4 elementi; non è quindi pensabile soprattutto per questo argomento fornire la stessa proposta a un'intera classe.

Sono tante le componenti del conteggio che devono essere acquisite e gestite dagli allievi. In particolare, il bambino dovrà essere in grado di coordinare contemporaneamente la parola, l'elemento della raccolta e il gesto (visivo o manuale). Tutti gli elementi dovranno essere considerati una e una sola volta secondo una strategia visuo-spaziale efficace, considerando le parole-numero corrette nel giusto ordine e, infine, sapendosi fermare quando si sono considerati tutti gli elementi.

Occorre tener conto che i bambini all'ingresso della scuola elementare contano con più precisione se usano il gesto, e se questo consente loro di toccare l'oggetto e, in caso di elementi mobili, di effettuare una partizione tra gli elementi già considerati e quelli ancora da considerare. Per alcuni allievi tali azioni non risultano però spontanee, in quanto entrano in gioco competenze visuo-spaziali, visuo-motorie, esecutive e di coordinazione difficili da essere gestite. Queste competenze vanno dunque considerate e favorite a livello didattico. Se il bambino è in difficoltà con il conteggio, è importante che i docenti siano in grado di osservare questi diversi aspetti nel modo più preciso possibile, scomponendo le varie componenti richieste e considerando le diverse variabili (disposizione degli elementi, numero di elementi, natura degli elementi, distanza tra gli oggetti, dimensione dello spazio a disposizione ecc.) e modificando di conseguenza le situazioni proposte. L'allievo potrebbe non essere capace di gestire la corrispondenza biunivoca perché associa ad alcuni elementi di un insieme un solo elemento di un altro insieme, o se ne dimentica altri. Questo avviene in particolare quando deve coordinare il ritmo della sequenza delle parole-numero con il gesto che indica un elemento da contare. Altri allievi potrebbero non conoscere la sequenza dei nomi dei numeri (la filastrocca dei numeri) per la raccolta considerata, quindi non essere in grado di associare il numero corrispondente agli elementi della raccolta. Altri allievi potrebbero non riuscire ad avere un piano di enumerazione efficace, con una strategia visuo-spaziale stabile e affidabile, che permetta loro di scegliere da dove partire, che strada seguire e dove fermarsi: passano più volte dagli stessi elementi, ne dimentica-

no alcuni o non riescono a gestire una partizione, ossia a separare gli elementi già contati da quelli ancora da considerare. Altri potrebbero non sapersi fermare all'ultimo elemento dell'insieme, continuando a ricontare elementi già valutati. Altri ancora, pur riuscendo nelle singole componenti del conteggio, potrebbero non saperle coordinare in un tutto integrato, fallendo quindi quando si chiede di individuare il numero di elementi di una raccolta. Avendo un'idea più precisa delle difficoltà degli allievi, sarà più facile attivare stimolazioni mirate o strategie compensatorie, creando percorsi personalizzati per sopperire alle diverse esigenze e per fornire proposte calibrate sulle reali competenze degli allievi. Tali considerazioni, oltre a riguardare il primo ciclo, sono trasferibili anche al secondo, modificando opportunamente le variabili in gioco di ogni componente del conteggio.

Cenni storici. Le prime testimonianze storiche di qualcosa che si suppone sia una sorta di conteggio per tenere la contabilità, risalgono a più di 35'000 anni fa, quando l'uomo ha iniziato a rappresentare l'insieme di una collezione (come giorni, animali di un gregge, barche) attraverso tacche su bastoni o ossa, o attraverso l'ausilio di oggetti concreti (come ad esempio raccolte di sassolini, conchiglie, semi e zanne), di cui i nostri progenitori facevano mucchi o file, corrispondenti alla quantità di animali, di persone o di oggetti per la quale volevano tenere la contabilità. Lo stesso poteva avvenire tramite nodi in cordicelle, o sgranando perle o conchiglie in una sorta di rosario.

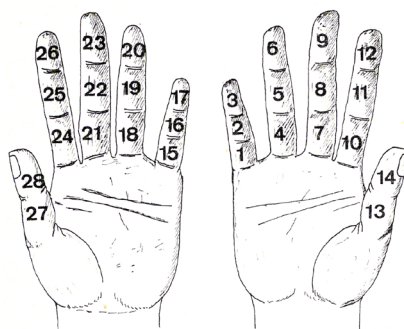


Tali oggetti sono gli stessi materiali che anche oggi si propongono in aula agli allievi per aiutarli a diventare abili nel conteggio. La pratica rudimentale di contare ricorrendo a sassolini presenti in natura si è poi raffinata soprattutto nei popoli del Medio Oriente (Sumeri, Assiri e Babilonesi) dove si iniziarono a creare piccoli oggetti in argilla detti *calculi* aventi forme prestabilite, da usare al posto dei sassolini. Calcoli di diversa forma potevano così assumere valori diversi. Dalla seconda metà del IV millennio a. C. alcuni di questi piccoli oggetti di forme e dimensioni differenziate venivano inseriti all'interno di contenitori ovoidali cavi in argilla, detti *bolle*; ciò allo scopo di quantificare ad esempio un debito, la registrazione di una proprietà, un pagamento effettuato. La chiusura della bolla e l'inserimento di un sigillo conferiva valore giuridico all'operazione. Per poter leggere il numero, occorreva quindi rompere la bolla. Per non dover ricreare ogni volta nuove bolle, a partire dal 3300 a. C. vennero rappresentati all'esterno i calcoli racchiusi all'interno, ma così si perse gradatamente la loro funzione iniziale; fu per questa ragione che le bolle furono in seguito sostituite dalle tavolette di argilla.

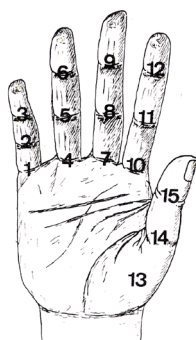
Va inoltre ricordato che le dieci dita della mano sono sempre servite all'essere umano per evocare i primi dieci numeri (da uno a dieci, escludendo lo zero, che può essere rappresentato con il pugno chiuso) e aiutare nelle tecniche di aritmetica elementare. Non è certo un

caso che ancora oggi i bambini che iniziano a contare e a effettuare le prime operazioni sfruttino questo strumento o che gli adulti si aiutino con gesti che chiamano in causa le dita per accompagnare il loro pensiero, quando è enumerativo.

Contrariamente a quanto si può pensare istintivamente, le mani non sono servite per contare sempre solo fino a dieci. Una tecnica, diffusa in India, Indocina e nella Cina meridionale fino a pochi decenni fa, praticata su entrambe le mani con l'aiuto di un dito dell'altra, consisteva nel considerare ogni falange come unità. Si cominciava dalla falange inferiore del mignolo della mano destra per finire alla falange superiore del pollice di una stessa mano (è possibile anche cominciare dalla falange superiore del mignolo e terminare alla falangetta del pollice). Si poteva quindi andare da 1 a 14 su una sola mano e continuare il conto fino a 28 sull'altra.



Un procedimento analogo, a lungo applicato nell'India nordorientale per pratiche religiose e tuttora in uso nelle province di Dacca (Bangladesh), di Calcutta (Bengala) e nei paesi islamici, dal Pakistan al Nord Africa, consiste nell'usare le giunture delle dita, cominciando dall'articolazione inferiore del mignolo e arretrando verso il pollice, il cui "grassello" vale come una giuntura. In questo modo, si può contare fino a 15 su una mano e fino a 30 su entrambe.



Tra le tecniche corporee connesse al numero, il ricorso alle dieci dita delle mani o alle diverse parti del corpo ha quindi svolto e svolge tuttora un ruolo determinante e la mano può essere considerata come la più semplice e disponibile macchina calcolatrice impiegata da tutte le popolazioni nel corso delle ere.

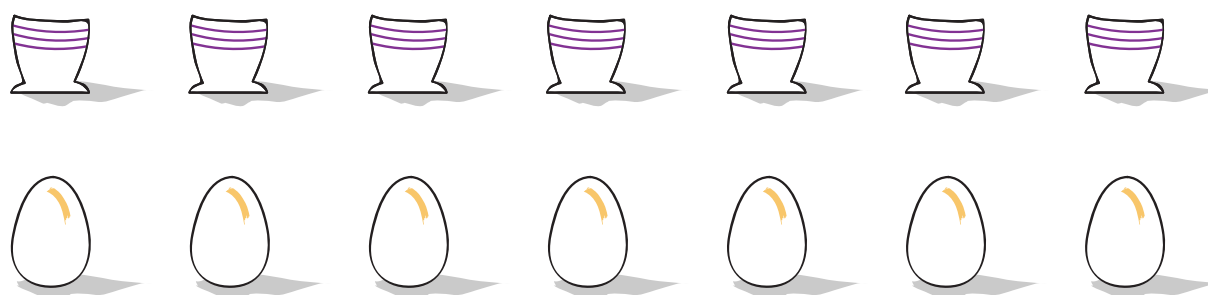
4.2.1 CORRISPONDENZA BIUNIVOCA

La corrispondenza uno a uno, detta corrispondenza biunivoca, è un'abilità che permette di confrontare la numerosità di due raccolte di oggetti, senza far ricorso a un procedimento astratto quale il conteggio, la nominalizzazione delle quantità o la conoscenza delle quantità implicate.

Si tratta di associare ad ogni elemento di un insieme uno e un solo elemento di un altro insieme e viceversa. Rappresenta un'operazione di pre-calcolo con la quale il bambino si trova confrontato quotidianamente. Ad esempio, nel ballo tradizionale c'è un maschio per ogni femmina; quando deve apparecchiare la tavola c'è un piatto per ogni tovagliolo; per ogni allievo c'è un banco in aula ecc.

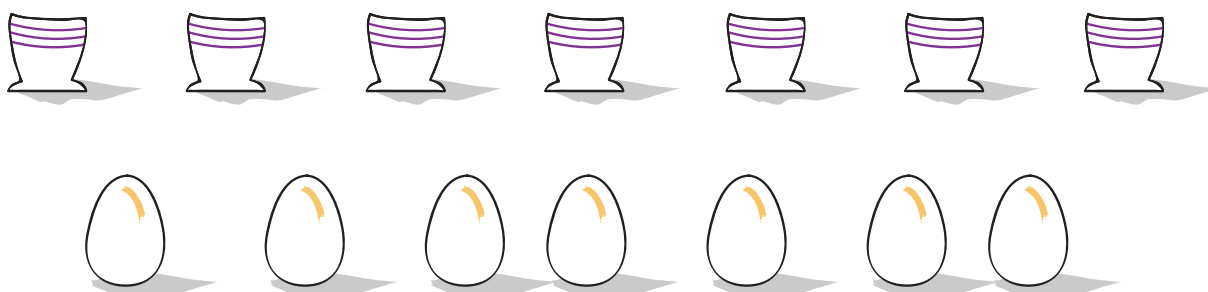
Aspetti didattici. Il bambino all'età di 2 anni inizia già spontaneamente ad applicare la corrispondenza biunivoca di fronte a collezioni di oggetti tridimensionali complementari, come ad esempio abbinare l'animale alla sua casa, distribuire un giocattolo ad ogni persona ecc. Il gesto aiuta i bambini a realizzare la corrispondenza biunivoca, consentendo di tener traccia degli elementi considerati; è possibile lasciare anche dei supporti come pennarelli, corde o altro materiale per consentire di realizzarla con più facilità.

La corrispondenza biunivoca diventa più complessa a seconda della tipologia di oggetti considerati (ad esempio si complica passando da oggetti complementari come: uovo-portauovo; pennarelli e tappi ecc. a non complementari), delle loro dimensioni, da come sono disposti (oggetti in fila o non in fila, essendo in quest'ultimo caso confrontati con il concetto della conservazione della quantità) ecc. Se si considerano ad esempio oggetti eterogenei ma complementari, come uovo-portauovo, posti uno di fronte all'altro come nella figura seguente, i bambini di solito non riscontrano particolari difficoltà nell'abbinare gli elementi uno a uno e nel sostenere quindi che i due insiemi hanno la stessa quantità di elementi.



Due collezioni: uova e portauovo messe una di fronte all'altra.

Se invece vengono distanziati gli oggetti di una delle due collezioni, i bambini possono avere difficoltà nell'abbinarli percettivamente, non rendendosi conto che la quantità degli elementi non cambia al variare della loro disposizione spaziale.



Oggetti maggiormente distanziati di una delle due collezioni.

Di fronte a due insiemi disposti in modo non allineato subentra infatti la difficoltà di effettuare un'esplorazione completa e senza ripetizione degli elementi di ciascun insieme, che presuppone una competenza che i bambini potrebbero avere difficoltà a gestire.

L'equivalenza quantitativa di due insiemi costituiti dallo stesso numero di elementi è un concetto che il bambino costruisce progressivamente, grazie alle proposte didattiche e al suo sviluppo intellettuale.

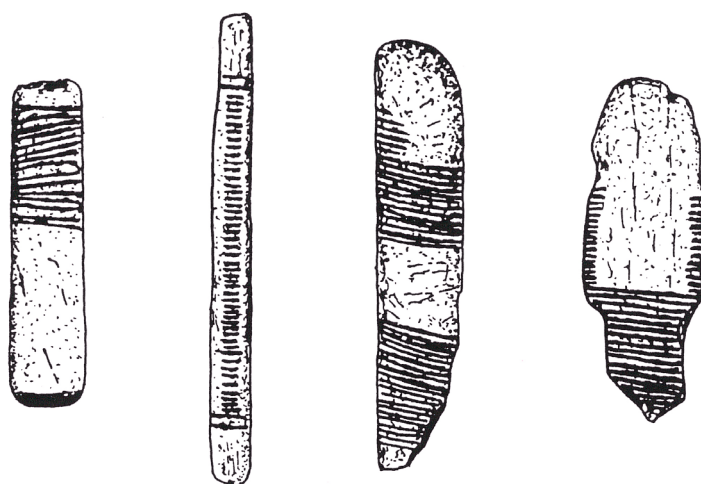
Va tenuto conto che la corrispondenza biunivoca rappresenta una strategia utile per confrontare la numerosità di due insiemi a qualsiasi livello scolastico. Per convincersene è sufficiente ricordare che la corrispondenza biunivoca è proprio la strategia che consente di confrontare due insiemi infiniti, come l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ e l'insieme dei numeri pari P , permettendo di scoprire che hanno la stessa quantità di elementi, ossia la stessa cardinalità. Corrispondenza biunivoca che è bene presentare agli allievi fin dal secondo ciclo.

$\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	...	n	...
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$		$\updownarrow$	
P	0	2	4	6	8	10	...	$2n$	...

Cenni storici. Fu proprio grazie alla corrispondenza biunivoca che l'uomo preistorico, nel corso di millenni, riuscì a costruire e poi utilizzare l'aritmetica per sopperire ad esigenze pratiche di contabilità, classificazione e distribuzione, ben prima di giungere all'idea di numero astratto.

Basta immaginare un pastore che sorveglia un gregge di pecore e che, per controllarle al rientro nella caverna, le fa entrare una alla volta; per ciascuna che gli passa davanti, intaglia una tacca su un bastone, oppure tiene il bastone saldamente in mano e fa scorrere l'unghia del pollice sulle tacche già incise, una per ogni pecora rientrata. In questo modo, potrà controllare ogni giorno, enumerando a una a una ciascuna pecora, se il suo gregge è al completo.

Questo metodo di conteggio basato sugli intagli è sicuramente uno dei più antichi; le prime testimonianze archeologiche note di tale pratica risalgono al 35'000 a. C. Si tratta del ritrovamento di diverse ossa e pietre oblunghe, recanti una o più successioni di incisioni regolarmente separate, rintracciate prevalentemente nell'Europa occidentale.

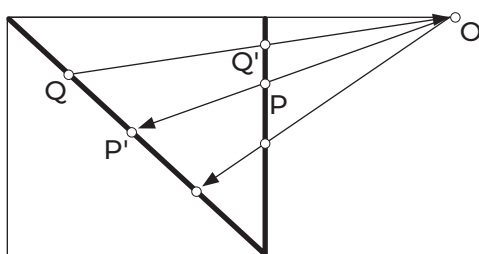


Ossa intagliate del Paleolitico superiore (dal 35'000 al 20'000 a. C.).

La corrispondenza biunivoca ha la proprietà di non tener conto della natura degli oggetti dei due insiemi considerati, valendosi così di un'azione astratta che esprime una caratteristica comune alle due raccolte in questione. Così facendo, con 15 tacche su un bastone è possibile considerare raccolte di 15 pecore, 15 vasi, 15 frecce, 15 nemici, 15 frutti, 15 pesci, 15 guerrieri ecc. indipendentemente dunque dal tipo di oggetti specifici che costituiscono la raccolta.

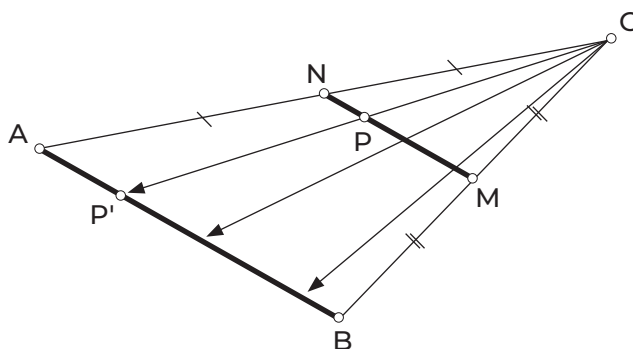
Nella storia della matematica la corrispondenza biunivoca è sempre servita per confrontare numerosità e ha avuto un ruolo determinante per confrontare insiemi infiniti.

Ricordiamo ad esempio il matematico Ruggero Bacone, che nella sua opera *Opus Maius* del 1233 scrisse che si può stabilire una corrispondenza (biunivoca, diremmo noi oggi) tra i punti di un lato di un quadrato e i punti di una diagonale dello stesso, nonostante abbiano diversa lunghezza. Basta osservare la seguente figura nella quale, immaginando di muovere la freccia OP' , a ogni punto P del lato viene fatto corrispondere uno e un solo punto P' della diagonale, analogamente, ad ogni punto Q della diagonale viene fatto corrispondere un solo punto Q' del lato.



Corrispondenza biunivoca tra i punti di un lato del quadrato e i punti di una sua diagonale.

Bacone non è il solo ad essersi occupato di infinito e corrispondenze biunivoche. Il grande Galileo Galilei, ad esempio, osservò che basta disegnare un triangolo ABC e vedere che tra il lato AB e il segmento NM , che congiunge i punti medi degli altri due lati, deve esistere una corrispondenza biunivoca ottenuta congiungendo i punti di AB con C e considerando il punto P' di AB , corrispondente di P di MN , ottenuti come intersezione di MN con CP' . Tutto ciò contro l'intuizione che sembra portare a far credere che AB , dato che ha lunghezza doppia rispetto a MN , sia formato da un numero maggiore di punti (si veda la figura).



Corrispondenza biunivoca tra i punti di un lato di un triangolo e i punti di un segmento lungo la metà del lato.

Anche in questo caso, osserviamo che vale anche il viceversa, ossia preso un qualsiasi punto Q appartenente al segmento più corto MN , lo si potrebbe collegare a C ; prolungando CQ fino ad intersecare il segmento più lungo AB si troverebbe uno e un solo punto Q' , corrispondente di Q .

Grazie a considerazioni di questo tipo si arriva dunque a scoprire che l'infinito può entrare in collisione con la famosa "nozione comune" di Euclide: «Il tutto è maggiore della parte». Galilei propose analoghe considerazioni anche in ambito numerico. Famosa è la costatazione detta *paradosso di Galilei*, nel quale si afferma che, da una parte, l'insieme $\mathbb{N}_Q$ dei numeri naturali quadrati è un sottoinsieme dell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, ma che, d'altra parte, è facile stabilire una corrispondenza biunivoca fra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}_Q$ facendo, per esempio, corrispondere a ogni numero n il suo quadrato n^2 :

$\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	...	n	...
	↕	↕	↕	↕	↕	↕		↕	
$\mathbb{N}_Q$	0	1	4	9	16	25	...	n^2	...

Nella seconda metà del 1800 Georg Cantor, la figura di maggior spicco nel campo degli insiemi infiniti, mostrò tramite corrispondenze biunivoche che ci sono tanti numeri naturali $\mathbb{N}$, quanti razionali $\mathbb{Q}$, quanti interi $\mathbb{Z}$: la cardinalità di questi insiemi è l'infinito numerabile. È solo nell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ che si ha a che fare con un altro tipo di infinito, l'infinito del continuo.

4.2.2 CONTA

La conta è legata alla successione ordinata dei nomi dei numeri, chiamati numerali: uno, due, tre, quattro ecc. La conta è ordinale, va quindi rispettato l'ordine della sequenza dei nomi, ed è ricorsiva, ossia ogni numero ha un suo successivo: basta aggiungere uno al numero precedente. Il bambino impara ad apprendere i primi numerali fin da piccolo e continua ad acquisirli tramite esperienze scolastiche ed extrascolastiche. Sono infatti tanti i contesti e i giochi che richiedono la conoscenza dei nomi dei numeri: nascondino, ruba bandiera, il gioco del plouf ecc. Va ricordato che per la conta si inizia per convenzione dal numero 1, anche se in molti altri contesti è importante partire da 0, ad esempio nel significato di numero come misura.

Aspetti didattici. L'acquisizione dei nomi dei numeri può risultare complessa per gli allievi, dato che richiede astrazione e una buona capacità di memorizzazione. Inoltre, a seconda della cultura e della lingua tale apprendimento risulta più o meno complesso.

Nell'italiano i nomi dei numeri sono diversi da 0 a 9 e poi arriva il 10 e da qui in poi si ricomincia: un-dici, do-dici, tre-dici ecc., con una dizione abbastanza complessa, che parte dalle unità e passa alla decina fino al se-dici e si inverte a partire dal dici-a-sette fino al dici-an-nove; poi arriva il venti e le cose diventano più semplici, anche se non si sente più nei nomi la base 10 (diciamo infatti "venti" e non "duedieci"): vent(i)uno, vent(i)due ecc.

Gli allievi possono incontrare difficoltà a memorizzare i nomi dei numeri, essendo la dizione complessa, e possono trovare comprensibilmente un ostacolo linguistico passando dal numero sedici al diciassette, a causa dell'inversione nella costruzione dei nomi. Occorre quindi didatticamente tener conto di tali difficoltà e, oltre a prevedere attività che permettano di memorizzare i nomi dei numeri partendo da uno, proporre altre finalizzate alla memorizzazione dei nomi delle varie decine (dieci, venti, trenta, quaranta ecc.) o di numeri più grandi, per far evolvere la conoscenza dei nomi dei numeri.

La difficoltà linguistica per l'apprendimento dei nomi dei numeri è ancora più accentuata in lingua francese. Un bambino francese dirà *soixante-sept* (il cui significato italiano corrisponderebbe a sessantasette) per indicare a parole 67, ma dovrà dire *soixante-dix-sept* (ovvero sessantadiciassette) per indicare 77; e *quatre-vingt-six* (traducibile con quattroventisei) per dire 86, addirittura *quatre-vingt-seize* (che potrebbe corrispondere, in italiano, a quattroventisedici) per dire 96.

In mandarino, la lingua ufficiale della Repubblica Popolare Cinese, la madrelingua più parlata al mondo, i nomi dei numeri da 0 a 9 sono tutti monosillabi e la struttura dal dieci in poi si ripropone sempre nello stesso modo (dieciuno, diecidue, diecitte ecc.). Secondo vari ricercatori, questo fatto facilita la memorizzazione veloce dei numeri e delle operazioni perché all'interno della parola-numero si rintraccia la struttura del numero stesso. Per esempio, in cinese, giapponese e coreano: $25 + 32$ si dice, a parole: (due dieci) cinque + (tre dieci) due. Sembra assai più facile trovare la somma anche a parole: (cinque dieci) sette. Effettivamente, l'apprendimento dei numeri e dell'aritmetica nei bambini di lingua madre mandarino precede di un anno e mezzo quello dei bambini di madrelingua francese. (Per approfondire si veda il contenuto [Raggruppamenti](#)).

L'uso delle dita delle mani può facilitare l'acquisizione della conta: la mano può essere vista come una successione di unità astratte, ottenute ricorsivamente a partire dalla prima aggiungendo ogni volta un'unità grazie all'autonomia, la specificità e la mobilità delle singole dita.

L'uso delle dita delle mani varia da paese a paese in tutto il mondo: l'assegnazione numerica si fa sia elevando successivamente le dita e dunque partendo dalla mano chiusa, sia riabbassandole una dopo l'altra partendo da una posizione aperta. Inoltre, l'ordine di tale attribuzione può effettuarsi da destra a sinistra o da sinistra a destra e il conto può cominciare dal pollice o dal mignolo, cioè dalle dita estreme, ma anche dall'indice come avviene presso certe popolazioni dell'Africa settentrionale.

La mano consente di passare in modo immediato dall'aspetto ordinale del numero (piegando o elevando le dita in successione), a quello cardinale (elevando tutte le dita corrispondenti al numero cardinale) e viceversa. La coordinazione tra parola e gesto può essere considerata un'azione spazio-temporale, alla stessa stregua di attività motorie come: saltare seguendo un ritmo sonoro, prendere e lanciare una palla, saltare la corda, tagliare con le forbici, scrivere.

Dal punto di vista didattico va considerato che l'uso delle dita delle mani rappresenta ancora oggi uno strumento fondamentale, utile, spontaneo e funzionale per iniziare a contare, che va valorizzato e non stigmatizzato. Saranno poi gli allievi ad abbandonarlo con l'evolvere delle proprie competenze e con la complessità delle proposte attivate dal docente.

Cenni storici. Ai primordi della storia dell'uomo, quando le quantità venivano finalmente indicate con suoni vocali, quelli che per noi sono oggi numeri avevano nomi diversi a seconda del tipo di oggetti cui si riferivano: il "due" di "due mele" era diverso dal "due" di "due pietre" per il semplice fatto che le mele e le pietre sono oggetti diversi. È un passaggio di astrazione straordinario, chissà quanto lontano nel tempo, quello in cui l'essere umano ha capito che poteva usare un solo suono, due, per indicare qualsiasi coppia di oggetti; cioè che in "due banane" e in "due pietre" vi è qualche cosa in comune, quello che oggi chiamiamo quantità, indipendente dalle caratteristiche degli oggetti contati. Un'astrazione folgorante che ha portato alla ricerca dei nomi dei numeri, indipendentemente dalla qualità degli oggetti enumerati.

Sappiamo oggi che questi nomi venivano ideati prendendo a prestito qualche cosa che si presentava con la stessa numerosità: ad esempio, l'uno era assimilato spesso alla testa, il due agli occhi o alle gambe, il cinque alle dita di una mano ecc.; in questo modo la frase

“occhi mele” significava: “tante mele quanti sono gli occhi”, dunque “due mele”. Gli altri nomi dei numeri potevano essere composti abbinando quelli conosciuti in modo additivo (uno di seguito all'altro). Diverse lingue e scritture, sia antiche che moderne, recano tracce di queste scelte.

Va anche ricordato che per alcune popolazioni, anche attualmente, i nomi dei numeri sono associati ad oggetti concreti di uso comune la cui forma ricorda quella della cifra che esprime il numero stesso: il sei diventa la coda della scimmia, il sette il gancio per raccogliere la frutta, l'otto la formica regina, il nove l'indice della mano destra, il dieci il piede, il cento è una sorta di buon augurio per riuscire a pescare tanti pesci, il mille è il molto eccetera.

Emerge come ci sia stata nella storia della matematica un'esigenza di ancorarsi al concreto per gestire i diversi aspetti del numero; stessa esigenza che sentono i bambini per acquisire questi concetti. (Per approfondire si veda il contenuto [Scrittura del numero](#)).

4.2.3 ENUMERAZIONE

L'enumerazione è una componente del conteggio che consiste nell'azione di passare una e una sola volta da ogni elemento di una raccolta, senza ricorrere alla conta orale, ossia alla “filastrocca dei numeri”. Rappresenta quindi l'azione di organizzazione spaziale di una collezione che permette di percorrerla in maniera controllata e ordinata: si tratta di scegliere un primo elemento, il suo successivo, di conservare la memoria delle scelte precedenti e di continuare finché si sa di avere scelto l'ultimo elemento.

Occorre quindi avere una strategia di percorrenza, ossia un piano di enumerazione visivo, che è influenzato da diversi fattori specifici del contesto.

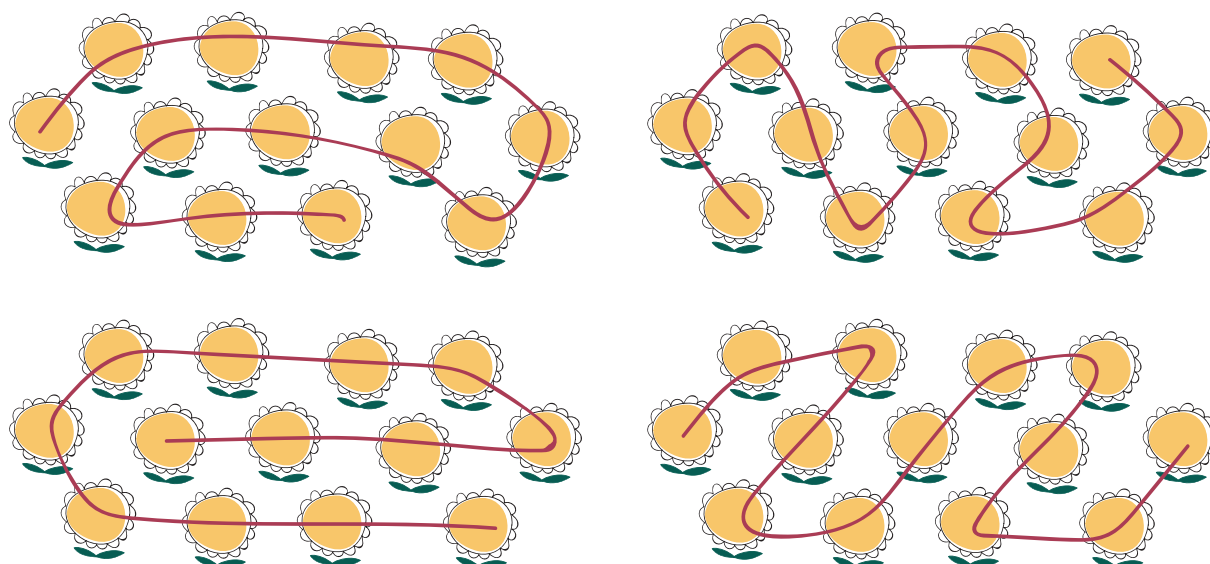
L'enumerazione non riguarda solo la matematica, vi sono infatti numerose azioni per le quali occorre percorrere una collezione in maniera ordinata e controllata: passare da ciascun animale di una storia, individuare tutte le *a* che ci sono in una parola o tutte le congiunzioni e in un testo, percorrere un testo cercando di ritrovare una parola, cercare una persona nella folla, un maglione nell'armadio ecc.

Aspetti didattici. Pur essendo solitamente sottovalutata a livello didattico, l'enumerazione rappresenta una componente essenziale e complessa del conteggio, perché richiede l'attivazione di un piano strategico e una buona coordinazione occhio-mano da parte dei bambini.

Si tratta di toccare o visualizzare ciascun elemento della raccolta una sola volta, e non due o più volte o dimenticandone alcuni, come invece spesso accade.

L'enumerazione di solito riguarda un insieme di elementi che non possono essere spostati, ma ciò non toglie che didatticamente si possano variare le proposte, consentendo anche lo spostamento degli elementi per favorire fisicamente la partizione in oggetti già considerati e oggetti ancora da considerare.

La difficoltà di effettuare un'enumerazione dipende da diverse variabili: disposizione degli elementi, numero di elementi, natura degli elementi (grandezza, peso, mobilità), distanza tra gli elementi, dimensione dello spazio a disposizione (micro o macro-spazio), possibilità di agire sugli oggetti: spostarli, segnarli, nasconderli ecc. Inizialmente vanno proposte raccolte ordinate (ad esempio disposte per righe e per colonne) costituite da pochi elementi (ad esempio 4 file di 3 elementi ciascuna), in seguito si aumenta il numero di elementi e si passa a raccolte disordinate.



Diverse strategie e diversi percorsi scelti per enumerare una collezione di oggetti.

Risulta interessante impostare esperienze motorie in macro-spazi come il giardino, chiedendo a un bambino di passare una e una sola volta da ciascuno dei compagni rimasti immobili al termine della musica, e in microspazi, chiedendo ad esempio al bambino di passare da elementi disposti su un tavolo o rappresentati in albi illustrati.

L'enumerazione si presenta caotica per alcuni bambini, soprattutto se possiedono difficoltà motorie, senza una strategia visuo-spaziale stabile e affidabile. Questi allievi risultano di conseguenza in difficoltà anche nel conteggio, soprattutto quando dovranno coordinare la corrispondenza biunivoca tra parole-numero e oggetti con il piano di enumerazione. In questi casi è importante prevedere un intervento specifico per gli allievi, fornendo alcuni aiuti in caso di necessità.

Va infatti considerato che la capacità di saper enumerare è insegnabile e si acquisisce con l'esperienza; vanno quindi programmate attività da far vivere agli allievi in entrambi i cicli scolastici, in contesti e con variabili adeguate all'età.

4.3 SISTEMA NUMERICO DECIMALE

Il nostro sistema numerico è posizionale, il valore delle cifre è cioè dato dalla loro posizione, ed è decimale, ossia è basato sulla base dieci. Sono proprio le dieci dita delle mani ad aver imposto all'uomo l'idea dei raggruppamenti per insiemi di dieci ed è per questo che tale base occupa nelle numerazioni antiche e moderne un posto importante, anche se la numerazione a base dieci non è l'unica esistente. Se la natura ci avesse fornito sei dita per mano, la maggior parte delle numerazioni della storia sarebbe stata fondata sulla base sei o sulla base dodici. Nel nostro sistema numerico facciamo anche uso di dieci simboli, dette cifre: 0, 1, 2, 3, ..., 9. Va però osservato che in un sistema numerico non è necessario che la base corrisponda al numero di simboli utilizzati. Ad esempio, l'antico sistema numerico Maya, anch'esso posizionale, pur avendo una base mista (venti e cinque insieme) sfruttava solamente tre simboli: il fagiolo (di valore 1), il legnetto (di valore 5) e un simbolo per lo zero.

Approfondimenti. La scrittura polinomiale di un numero è una rappresentazione basata su un'addizione dei prodotti di ogni cifra del numero moltiplicata per un'opportuna potenza di 10, così da rappresentarne il valore. Questa rappresentazione mette dunque in risalto il valore di ogni cifra in base alla posizione che occupa.

Ad esempio, il numero 1'932 in forma polinomiale diventa:

1	9	3	2
migliaia	centinaia	decine	unità

moltiplicando la cifra delle unità per 1, la cifra delle decine per 10, quella delle centinaia per 100, delle migliaia per 1'000, e addizionando tutti questi prodotti, avremo:

$$2 \times 1 + 3 \times 10 + 9 \times 100 + 1 \times 1'000$$

che corrisponde a:

$$2 \times 10^0 + 3 \times 10^1 + 9 \times 10^2 + 1 \times 10^3$$

Facendo i calcoli è possibile verificare che tale scrittura corrisponde proprio al numero 1'932.

Anche un numero decimale (si veda il contenuto [I numeri decimali](#)) si può scrivere in forma polinomiale, procedendo in modo analogo al caso dei numeri naturali e utilizzando potenze di 10 con esponente negativo.

Ad esempio, il numero 24,36 in forma polinomiale diventa:

2	4	3	6
decine	unità	decimi	centesimi

e può essere scritto anche come

$$6 \times 10^{-2} + 3 \times 10^{-1} + 4 \times 10^0 + 2 \times 10^1$$

Aspetti didattici. L'acquisizione del sistema numerico posizionale risulta complessa, in quanto occorre comprendere che ciò che attribuisce il valore alle cifre è la posizione che esse occupano nella scrittura del numero; ciò può essere favorito dalla proposta di attività didattiche legate ai raggruppamenti, basati prevalentemente su gruppi di dieci elementi, e dall'uso di artefatti che consentono di visualizzare la differenza tra singoli elementi (unità), raggruppamenti di dieci elementi (decine), raggruppamenti di cento elementi (centinaia) ecc.

Va considerato che all'ingresso della scuola elementare più della metà dei bambini intuisce che un numero formato da più cifre è più grande di un numero formato da meno cifre, indipendentemente dal saper leggere i numeri e il saper comprenderne la grandezza; alcuni bambini intuiscono anche che tra due numeri formati dallo stesso numero di cifre (ad esempio 13 e 31), quello più grande è quello che ha la cifra più grande a sinistra ("Bisogna guardare il primo numero e capire quale è più grande!"). Partendo da queste premesse è possibile impostare le esperienze didattiche sul sistema posizionale decimale, legate prevalentemente al mondo reale, confrontandosi fin dall'inizio e senza paura anche con lo zero, sia come numero, sia come cifra, essendo uno dei dieci simboli con i quali possiamo scrivere e concepire tutti i numeri. Ovviamente non è facile comprendere che lo zero, al quale viene intuitivamente associato il significato di niente o assenza, ha in realtà un ruolo fondamentale nella scrittura del numero e dà come gli altri numeri informazioni sulla cardinalità di una raccolta. Osserviamo inoltre che la scrittura polinomiale di un numero è unica, se si considerano come coefficienti delle potenze di 10 le nostre 10 cifre, ma ce ne sono moltissime altre se si esce da questo vincolo. È opportuno considerare con gli allievi anche altre scomposizioni possibili del numero, quantificando in modo diverso unità, decine, centinaia ecc.; questo

per evitare che i bambini interiorizzino che il numero 561, ad esempio, contiene esattamente 6 decine, mentre occorre considerare che il 561 è formato da 56 decine.

Nel secondo ciclo è importante trasferire le competenze acquisite sul sistema posizionale ai numeri naturali sempre più grandi e ai numeri decimali, lavorando in analogia con quanto appreso nel ciclo precedente. In particolare, è importante riprendere le considerazioni proposte nel primo ciclo per far cogliere il ruolo del valore delle cifre legato alla loro posizione nella parte decimale di un numero. (Si veda il contenuto [I numeri decimali](#)).

Cenni storici. Il nostro sistema numerico posizionale a base dieci fu creato in India nel 500 e arrivò presso gli Arabi nell'800, per questo è detto sistema numerico indo-arabo. Giunse in Europa solo nel 1202, grazie al famoso testo *Liber Abaci* scritto da Leonardo, figlio di Bonaccio il Pisano e per questo chiamato Fibonacci. In questo libro, Fibonacci parla delle nove "cifre" indiane (le *figure delli Indi*) e del "segno" zero (chiamato dagli Arabi *zefiro*), negando così allo zero, ancora una volta nella storia della matematica, la dignità di cifra, ma da allora usato sistematicamente come segno in Occidente.

È grazie allo zero che è stato possibile passare dai sistemi numerici additivi, poco flessibili e utilizzabili dal lato algoritmico, ai potenti sistemi posizionali; una conquista molto lunga e difficile nella storia della matematica.

Infatti, nei sistemi additivi una semplice operazione come 148×673 diventava un notevole problema; i Romani (si veda il contenuto [Altri sistemi numerici](#)), ad esempio, dovevano procedere a passi nel seguente modo:

$$\text{CXLVIII} \times \text{DCLXXIII} =$$

$$\text{VIII} \times \text{III} + \text{VIII} \times \text{LXX} + \text{VIII} \times \text{DC} + \text{XL} \times \text{III} + \text{XL} \times \text{LXX} + \text{XL} \times \text{DC} + \text{C} \times \text{III} + \text{C} \times \text{LXX} + \text{C} \times \text{DC}$$

Scrittura equivalente a

$$148 \times 673 =$$

$$8 \times 3 + 8 \times 70 + 8 \times 600 + 40 \times 3 + 40 \times 70 + 40 \times 600 + 100 \times 3 + 100 \times 70 + 100 \times 600.$$

Si noti che anche oggi, nell'eseguire moltiplicazioni come questa, noi compiamo, senza magari rendercene conto, le stesse operazioni elementari in maniera rapida e per nulla difficoltosa, sfruttando la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione; ma la relativa facilità odierna sta nel fatto che noi usiamo un sistema posizionale; dunque, tutti questi passaggi sono impliciti nell'algoritmo della moltiplicazione e non occorre esplicitarli uno per uno. A queste difficoltà si aggiungevano quelle legate alla notazione grafica dei numeri, che rendevano davvero complesso eseguire calcoli anche semplici.

Tornando alla storia dello zero, inizialmente questo numero veniva evitato o non considerato dalle diverse culture, probabilmente a causa di timori di tipo filosofico. Successivamente fu concepito semplicemente come spazio vuoto, ossia come assenza, costringendo così chi doveva leggere il valore dei numeri a interpretarli sulla base dei contesti, fino a quando venne riconosciuto come cifra al pari di tutte le altre.

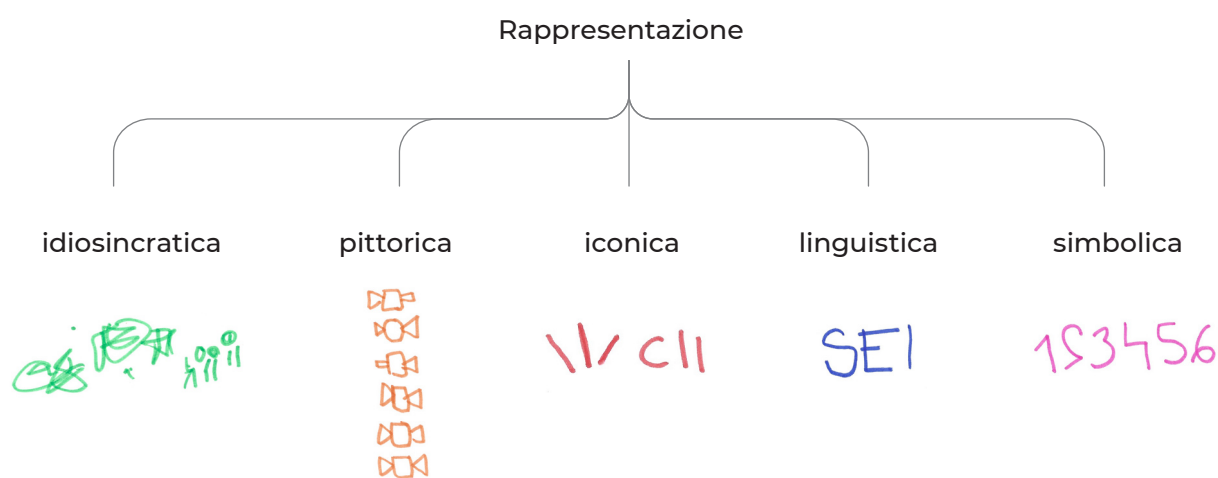
Ammettere che zero sia un numero e che questo necessiti di una cifra specifica, è stata una vera e propria rivoluzione nell'ambito della matematica.

Va ricordato che i contributi di Fibonacci rimasero pressoché sconosciuti per più di due secoli e furono volgarizzati verso la fine del XV secolo ad opera del frate matematico toscano Luca Pacioli. Fu così che si diffusero metodi algoritmici estremamente rapidi ed efficaci per eseguire le operazioni elementari. Il *Liber Abaci*, l'opera matematica più significativa del Medioevo occidentale, contenente anche numerosi problemi, fu pubblicata a stampa solo nel 1857.

4.3.1 SCRITTURA DEL NUMERO

Tra le diverse abilità che rientrano nella comprensione e gestione dell'universo numerico, vi sono anche la lettura e la scrittura dei numeri. Per quanto concerne la scrittura del numero, citiamo almeno cinque categorie di rappresentazione che mettono in evidenza la variabilità espressiva degli allievi:

- *idiosincratca*, priva di notazioni numeriche comprensibili per un lettore, ma ricche di significato personale per il bambino;
- *pittografica* o *pittorica*, che riproduce figurativamente gli oggetti della collezione;
- *iconica*, formata da segni grafici che non sono immagini degli oggetti coinvolti, ad esempio tacche e simboli, ma che stanno con essi in corrispondenza biunivoca;
- *linguistica*, scritta in lingua naturale;
- *simbolica*, costituita dai numeri indo-arabi veri e propri (le nostre 10 cifre convenzionali).



Principali categorie di scrittura dei numeri.

Le rappresentazioni spontanee dei bambini più diffuse all'ingresso della scuola elementare sono la pittorica, l'iconica e la simbolica. Va considerato che le scelte che l'allievo fa per rappresentare una certa quantità possono variare a seconda di diversi fattori: caratteristiche del contesto, finalità comunicativa, comprensione della quantità coinvolta, materiale a disposizione ecc. Ciascuna rappresentazione scelta dagli allievi ha i suoi tratti caratteristici, i suoi vantaggi e svantaggi da considerare e valorizzare.

La rappresentazione simbolica non risulta semplice e intuitiva per tutti, dato che richiede l'acquisizione delle due principali caratteristiche del nostro sistema di notazione dei numeri: la natura arbitraria e indipendente dagli oggetti a cui si applica e la natura compilativa, che consente di sostituire un solo segno (4) a un insieme di segni (# # # #). Inoltre, per comprendere la rappresentazione simbolica dei numeri del nostro sistema, oltre a riuscire a dominare le 10 cifre, occorre padroneggiare il loro valore posizionale.

Aspetti didattici. È tramite le diverse esperienze socioculturali riguardanti il numero, da far vivere ai bambini, che avviene un'evoluzione delle percezioni spontanee verso una comprensione più profonda, completa, consapevole e matura di questo oggetto culturale. In questo cammino vi è anche un'evoluzione delle rappresentazioni dei numeri. Quando un bambino all'ingresso della scuola elementare è chiamato a rappresentare una determinata quantità può decidere di farlo tramite diversi canali: verbale, gestuale, grafico ecc. e utilizzando diversi segni e artefatti.

Inizialmente il bambino inventa modi personali e spontanei per rappresentare il numero, ponendo l'attenzione su aspetti narrativi, contestuali o prettamente legati alla quantità coinvolta. Ciò che risulta particolarmente interessante è che gli stessi bambini, di fronte a situazioni diverse, mettono in campo rappresentazioni differenti e che queste non seguono un'evoluzione fissa ma dipendono da diverse variabili. Le rappresentazioni dei numeri tramite il codice scritto hanno un rapporto profondo con la comprensione del numero.

Risulta quindi importante rispettare le personali scelte spontanee per considerare e valorizzare le singole competenze degli allievi. L'intento è di non vincolare i bambini all'acquisizione della scrittura dei numeri indo-arabi (rappresentazione simbolica) troppo presto, quando ancora non è compreso il loro valore semantico quantitativo veicolato e quando ancora non sanno padroneggiare le due principali caratteristiche del nostro sistema di notazione: la natura arbitraria e la natura compilativa.

Dal momento in cui l'allievo sceglie spontaneamente di rappresentare i numeri in modo simbolico (indo-arabo) è importante aiutarlo a farlo correttamente, rispettando una giusta impugnatura della matita e cercando di rispettare le direzioni di scrittura così da favorirne nell'azione. Il momento giusto per acquisire tale apprendimento in prima elementare può variare da bambino a bambino. Occorre infatti considerare che scrivere le cifre è un processo complesso che richiede di immagazzinare e recuperare una rappresentazione visiva in memoria, accedere al programma motorio che le corrisponde, definire i parametri di questo programma (forma, dimensione, direzioni e velocità) ed eseguirlo ponendo i simboli nello spazio grafico a disposizione.

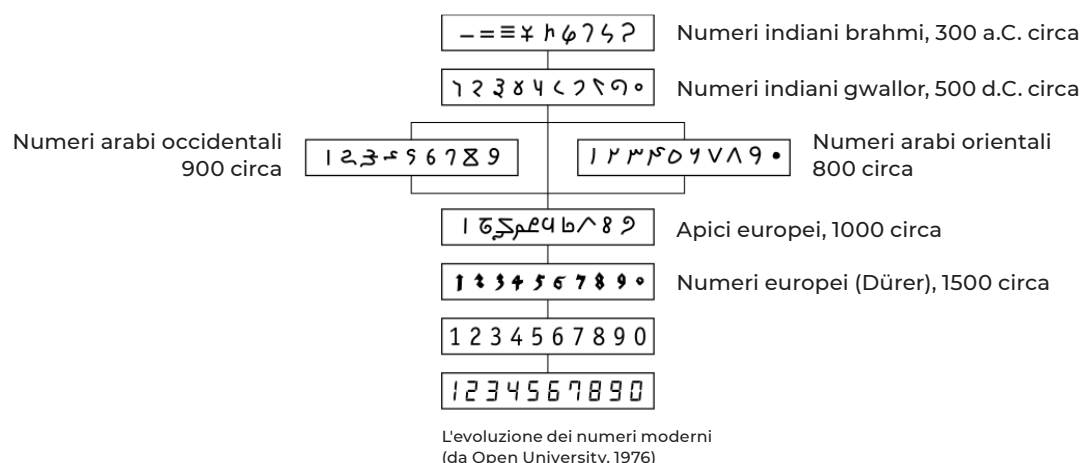
Gli errori di scrittura più frequenti sono la specularità e le rotazioni e dipendono da diverse cause. Le cifre che presentano più frequentemente delle inversioni sono: 3, 2, 7, 9, 1 (in ordine decrescente rispetto alla frequenza con cui appaiono invertite). Il metodo di insegnamento rappresenta quindi un elemento fondamentale per facilitare l'acquisizione di quella che potremmo chiamare "la grammatica del gesto". Da questo punto di vista risultano molto interessanti i consigli che possono giungere dall'ergoterapia. Acquisito tale metodo, la scrittura del numero nel secondo ciclo è particolarmente influenzata da aspetti concettuali del numero che occorre apprendere nell'arco della scolarità.

Cenni storici. I più antichi numeri scritti che si conoscano sono incisi su tavole di pietra e risalgono al 4000 a. C. Ma tacche su bastoni certamente furono molto precedenti, forse del 60'000 a. C., dato che sono state rintracciate tacche su ossa del 30'000 a. C. Le prime cifre sumere comparvero tra il 3300 e il 2850 a. C. e tali cifre furono adottate in Mesopotamia dal 2500 a. C. in poi.

Le prime forme di scrittura di un numero erano il "disegno" di ciò che rappresentavano, così come fanno spontaneamente i bambini. Ne sono un esempio interessante i segni utilizzati dalla scrittura geroglifica egizia, nella quale le cifre cambiavano di orientamento in base al senso di lettura del testo. Nella storia e nelle diverse culture i simboli usati per rappresentare i numeri assunsero spesso la forma di oggetti che ricordavano i vari numeri o il loro nome.

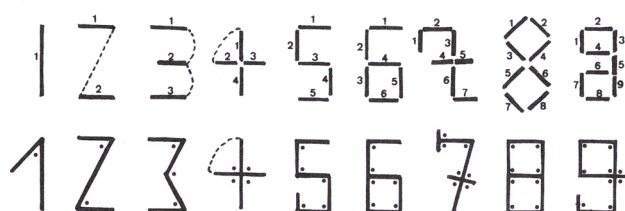
Le attuali cifre (i dieci segni per rappresentare i numeri da 0 a 9), usate per scrivere i numerali nella nostra cultura, sono indo-arabe: furono gli Indiani a creare un sistema di rappresentazione così potente e gli Arabi lo ritoccarono solo, facendolo proprio. Ciò non deve far credere che i simboli da noi usati oggi siano esattamente gli stessi; tali segni cambiarono con il passare dei secoli.

Riportiamo di seguito l'evoluzione della scrittura delle nostre dieci cifre:



Evoluzione della scrittura delle nostre dieci cifre.

L'Europa tardò molto a rendere le cifre indo-arabe stabili, e ciò avvenne soprattutto grazie all'invenzione della stampa, la tipografia a caratteri mobili, ideata da Johann Gutenberg nel XV secolo. È interessante osservare che i trattati rinascimentali fornivano stratagemmi per memorizzare la scrittura, così come viene fatto oggi a livello didattico per favorire il suo apprendimento da parte dei bambini:



Stratagemmi rinascimentali per memorizzare la scrittura delle cifre.

4.3.2 RAGGRUPPAMENTI

Con raggruppamenti intendiamo la creazione di gruppetti formati da un numero fisso di elementi di un insieme. I gruppi di due elementi si chiamano duine (o coppie), quelli di tre elementi terzine, di quattro quartine e così via.

L'idea di raggruppamento porta alla concezione della base di un sistema numerico (che può essere interpretata come il numero di elementi di ogni singolo gruppetto). Ad esempio, il nostro sistema numerico decimale è basato sul raggruppamento in decine.

Aspetti didattici. Il tema dei raggruppamenti può essere introdotto partendo da vari contesti di gioco, proposti all'aperto o al chiuso, motori o da tavolo, e da situazioni legate al contesto di vita reale.

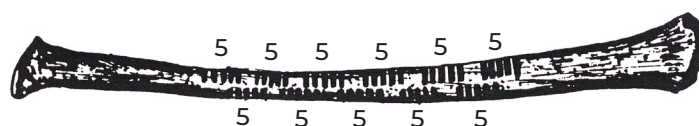
Il materiale proposto può favorire un certo tipo di raggruppamento o un altro: le scarpe sono adatte per fare gruppi formati da 2 elementi, dato che si presentano a coppie; i contenitori delle uova si prestano per fare raggruppamenti di 4, 6, 10, 12 elementi; le scatole di pennarelli possono essere adatte per raggruppamenti di 12 o 24 elementi ecc.

Anche il numero totale e la disposizione degli elementi possono spingere ad effettuare un

certo tipo di raggruppamento oppure un altro; risulta quindi importante cambiare le variabili per osservare e confrontare le diverse scelte effettuate dagli allievi. A parità di elementi è interessante osservare come cambia il numero di gruppi che si formano a seconda del numero di elementi che si decide di inserire in ogni gruppo.

I raggruppamenti risultano funzionali anche per effettuare conteggi a due a due, a tre a tre ecc. Quando gli allievi acquisiscono un po' di competenza, risulta importante portarli a effettuare raggruppamenti di 10 elementi, come le dita delle mani, così da avvicinarsi presto al nostro sistema numerico. È importante ricordare che non occorre apprendere prima tutte le basi fino alla 9, per concepire il nostro sistema numerico in base 10.

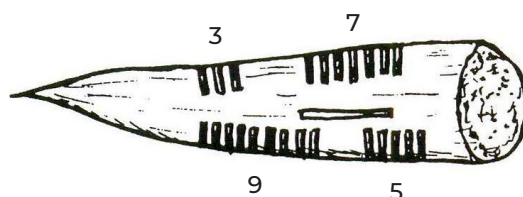
Cenni storici. Il primo ritrovamento storico in cui è presente l'idea di raggruppamento è il famoso radio di lupo nel quale si trovano 55 tacche suddivise in due serie di gruppi di cinque, rinvenuto nel 1937, in mezzo a sedimenti risalenti al 32'000 a. C. Esso rappresenta senza dubbio uno dei più antichi documenti aritmetici giunti fino a noi, in cui è presente il principio della base, dato che le tacche sono raggruppate in gruppi di cinque come le dita di una mano.



Ossa di lupo (radio) del 32'000 a. C.

Fu Aristotele a ipotizzare che proprio il numero delle dita di una mano fosse stato scelto come base per gli antichi sistemi di numerazione e questo oggetto sembra confermare tale ipotesi. La conta a cinque a cinque è citata anche nell'*Odissea*, a proposito di Proteo, custode del gregge delle foche e di altre bestie marine del Dio del mare Poseidone. Dunque, il conteggio in base 5 è notevolmente antico.

Altrettanto interessante è anche un osso di renna a forma di cono trovato alcuni decenni fa in Dordogna, risalente al periodo che va tra il 19'000 e il 12'000 a. C., conservato nel museo d'Aquitania a Bordeaux, in Francia. In questo osso vi è un intaglio longitudinale che separa due successioni di tacche trasversali regolarmente spaziate, ognuna suddivisa in due gruppi distinti (3 e 7 tratti da una parte, 9 e 5 dall'altra).



Punzone di ossa di renna (datato tra il 19'000 e il 12'000 a. C.).

Oltre al ritrovamento di tacche realizzate su ossa, ci sono pervenute raccolte di oggetti con cui i nostri progenitori facevano mucchi per effettuare conteggi.

Anche in lingue moderne si rintracciano ancora antiche aritmetiche basate su raggruppamenti diversi dal dieci. In danese, 40 è detto *fyr re* (quattro decine), ma 80 è detto *firs* (quattro volte, con venti sottinteso); in irlandese 2 è *da*, 20 è *fiche* e 40 è *da fiche* (2 x 20); in suomi 2 è *kah*, 10 è *san* e 8 è *kah dek san* (due manca a dieci, ossia 10 - 2).

In diverse culture e in specifici contesti si sono diffuse anche altre basi, impostate su altri raggruppamenti, come la base dodici, comoda per le divisioni, o la base sessagesimale, utilizzata ancora oggi per il tempo o le ampiezze degli angoli. Ma sono proprio le dieci dita della mano ad aver imposto all'uomo l'idea dei raggruppamenti per insiemi di dieci, di cinque (per chi considera una sola mano) o di venti (per chi considera sia le mani sia i piedi) ed è per questo che tali basi hanno avuto il sopravvento su tutte le altre.

4.3.3 ALTRI SISTEMI NUMERICI

Sono diversi i sistemi numerici che si sono susseguiti nella storia e che sono stati scelti dalle diverse culture: uno dei primi di cui si è a conoscenza è basato sull'uno, il due e il molto. Uno rappresentava l'unità, due la coppia, e molto rappresentava parecchi o una moltitudine che serviva per parlare di tutte le altre quantità a partire dal tre. Non è un caso che la radice comune alle lingue semitiche "tr", che significa originalmente "molto", si ritrova ancora in lingue moderne a significare sia molto che tre, come per esempio in francese (*très, trois*).

Si sono poi diffusi diversi sistemi di numerazione ancorati a differenti basi: cinque (come le dita di una mano), dieci (che considera le dita di entrambe le mani), venti (che considera tutte le dita del nostro corpo), dodici (comoda dal punto di vista aritmetico, essendo il numero 12 divisibile per 1, 2, 3, 4, 6), sessanta (derivante da questioni legate al tempo e ai calendari) ecc. La base dodici veniva impiegata soprattutto nei sistemi commerciali di un tempo; di questo utilizzo ci restano oggi testimonianze nei termini dozzina e grossa (dozzina di dozzine), usate tuttora per uova e ostriche. La base sessanta, detta sessagesimale, viene ancora utilizzata per le ampiezze degli angoli e per misurare il tempo.

Nella storia si sono susseguiti sistemi additivi, nei quali il valore del numero era dato dall'addizione del valore di ogni simbolo, come quello degli Egizi, Greci, Etruschi, Romani, e sistemi posizionali come il nostro. Con ogni probabilità, il primo sistema posizionale della storia risale ai Sumeri; tale sistema è stato assunto in seguito dai Babilonesi e perfezionato infine dagli Indiani. Un sistema numerico posizionale a base venti mista (la venti e la cinque insieme) fu ideato dai Maya. Un vero e proprio sistema numerico posizionale a base dieci da cui deriva il nostro fu creato in India nel 500, arrivò presso gli Arabi nell'800 e giunse in Europa solo nel 1202.

Aspetti didattici. È tramite il confronto tra il nostro sistema numerico decimale e differenti sistemi scelti da altre culture o utilizzati in diversi periodi storici, che è possibile comprendere con più profondità le caratteristiche e le potenzialità di quello utilizzato da noi oggi e capire che le scelte in tale ambito non sono univoche. Risulta sorprendente, per chi non ha mai visto alternative, comprendere che ci sono diverse strade per approcciare la rappresentazione e l'impostazione di un sistema numerico e non solo quella che abbiamo appreso noi fin da piccoli. Si apre così lo sguardo degli allievi su punti di vista diversi dai propri, cogliendo i limiti e le potenzialità di ciascun sistema.

È interessante analizzare inizialmente la tecnica utilizzata dagli uomini primitivi basata su tacche rappresentate su ossa o bastoni, così da intuire quanto risulta laborioso rappresentare 18 oggetti con ben 18 tacche, invece di utilizzare soli due simboli: 1 e 8, nel nostro sistema. Gli allievi inizieranno così ad intuire l'efficacia del nostro sistema posizionale.

È anche possibile introdurre il sistema additivo romano e l'affascinante sistema egizio per mostrarne i simboli, comprenderne le caratteristiche e il funzionamento, oltre a permettere interessanti accenni storici e geografici. I sistemi additivi utilizzati dai Romani e dagli Egizi rappresentano certamente un'evoluzione del sistema a tacche basato sulla corrispondenza biunivoca, ma possiedono certamente dei limiti, soprattutto a livello algoritmico,

rispetto a quello che utilizziamo noi oggi.

È anche possibile proporre sistemi posizionali alternativi rispetto al nostro, come quello Babilonese o l'efficace sistema dei Maya, mettendo in evidenza scelte alternative di basi, di numero di cifre e di uso dello zero. Proporre altri sistemi numerici consente anche di far esercitare gli allievi su conteggi e calcoli in contesti stimolanti e diversi dalla routine. Va però considerato che è solo nel secondo ciclo che il confronto diventa ricco e profondo.

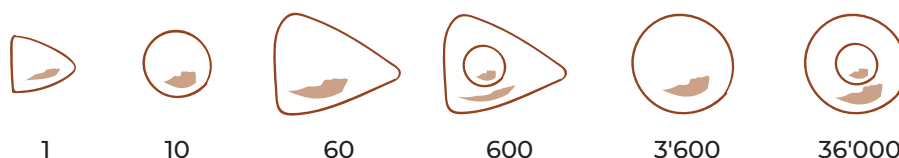
Risulta inoltre molto interessante per la formazione globale dell'individuo collocare tali sistemi numerici nel periodo storico e nei luoghi del mondo dove effettivamente si sono sviluppati.

Cenni storici. Riportiamo di seguito alcuni esempi di sistemi di numerazione adottati da altre culture nella storia, che possono risultare interessanti da essere proposti in classe.

Sumeri. Dopo la pratica degli intagli, tra i primi veri e propri documenti storici legati a sistemi numerici, vi sono numerose tavolette d'argilla risalenti alla civiltà sumerica, rintracciate in epoca relativamente recente in Mesopotamia, la terra fra i due fiumi Tigri ed Eufrate. I Sumeri, la cui origine si perde in epoche preistoriche, dominarono queste terre fino alle soglie del II millennio a. C. Risale a loro, con ogni probabilità, il primo sistema posizionale della storia dell'uomo. Le prime cifre sumere comparvero tra il 3300 e il 2850 a. C. e furono adottate in Mesopotamia dal 2500 a. C.

Il loro sistema numerico era misto, parte in base sessagesimale e parte in base decimale, e si fondava su un criterio additivo, per cui al valore di ogni simbolo andava aggiunto quello del simbolo immediatamente successivo: giunti a sommare l'ultimo simbolo, si otteneva così il valore dell'intero numero.

Essi avevano come unità di conto il piccolo cono, la piccola sfera, il grande cono, il grande cono perforato, la grande sfera e la grande sfera perforata. I valori relativi corrispondevano a 1, 10, 60, 600, 3'600, 36'000.

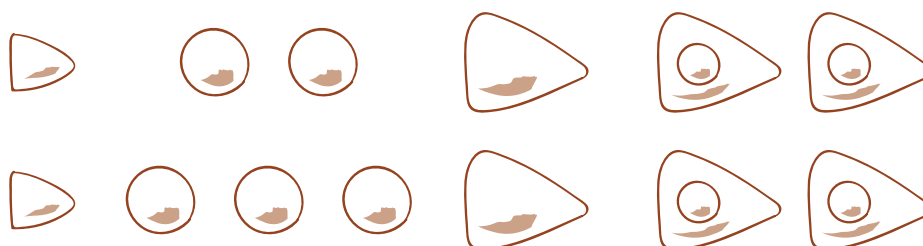


Simboli numerici del sistema sumero.

Per esempio, se si vuole scrivere 2'572, si deve innanzitutto notare che:

$$2'572 = 4 \times 600 + 2 \times 60 + 5 \times 10 + 2 \times 1$$

Utilizzando i simboli della civiltà sumerica: 4 volte il grande cono perforato, 2 volte il grande cono, 5 piccole sfere e 2 piccoli coni, 2'572 si scrive nel seguente modo, con le unità disposte a sinistra.



Rappresentazione del numero 2'572 con i simboli del sistema sumero.

Il principio è simile a quello dell'attuale sistema decimale, tuttavia la posizione dei simboli non rappresentava potenze a coefficienti successivi del 60, essendo il sistema anche additivo, e non era specificata una regola precisa e definitiva. Inoltre, i simboli del piccolo cono o del grande cono, così come quelli della piccola sfera o della grande sfera, avevano la stessa forma, variava solo la dimensione, dunque potevano essere confusi tra loro, soprattutto nel caso in cui non fossero entrambi presenti nel numero rappresentato. Chi leggeva la tavoletta doveva intuire l'ordine di grandezza basandosi sulle informazioni che aveva in merito al problema. Per questo a volte i segni numerali venivano accompagnati da logogrammi che servivano ad indicare gli oggetti conteggiati (per esempio, panieri di cibo destinati ai lavoratori), così da poter intuire a seconda della loro natura l'ordine di grandezza coinvolto.

Babilonesi. Nel frattempo, la fertile e ricca terra dei Sumeri venne invasa dai Babilonesi. Essi introdussero, accanto alla scrittura sumera, quella cuneiforme, cioè a forma di cuneo, assai più interessante. Per un certo periodo le due scritture convivsero, ma in seguito la scrittura cuneiforme prese il sopravvento consolidandosi soprattutto nel periodo della ricca e florida dinastia degli Hammurabi (tra il 1800 e il 1600 a. C.).

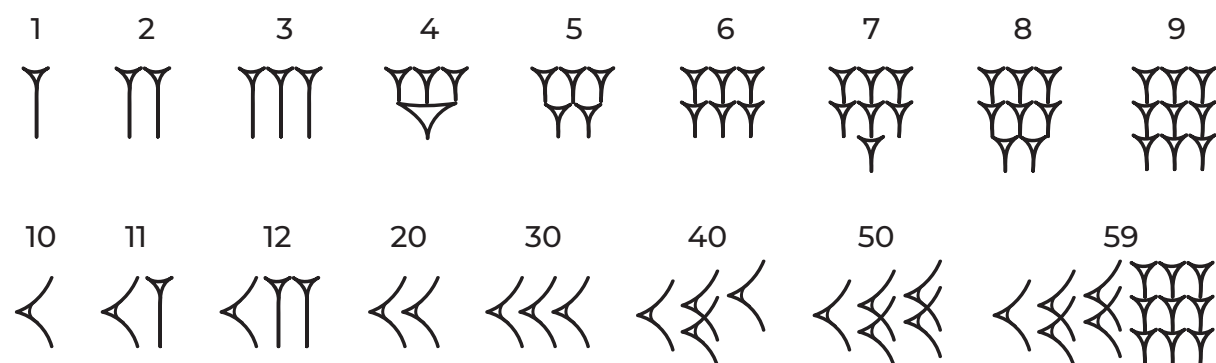
I Babilonesi usavano un sistema sessagesimale posizionale, non possedevano inizialmente un simbolo per lo zero e scrivevano i numerali come combinazioni di due soli simboli:



il "chiodo verticale" o "cuneo" per le unità



il "punzone" con la punta diretta a sinistra o "angolo" per le decine



Rappresentazione di alcuni numeri cuneiformi babilonesi.

Questi simboli (formati in modo additivo) venivano usati come "cifre" in un sistema sessagesimale posizionale. Ciò significa che, una volta arrivati a 60, questi 59 simboli venivano usati di nuovo per indicare le sessantine.

Così:

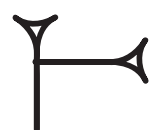
1 sessantina era rappresentata da un cuneo,
2 sessantine erano rappresentate da due cunei,
3 sessantine erano rappresentate da tre cunei,
e via così.

Vi era quindi lo stesso simbolo per l'1 e per il 60, e questa volta della stessa dimensione, quindi a maggior ragione per comprendere l'ordine di grandezza di ciò che si voleva quantificare occorre risalire al contesto e lavorare sulla posizione.

Ad esempio, 62 veniva rappresentato nel seguente modo, dove il primo cuneo indica una sessantina, ossia un'unità di ordine superiore e gli altri due cunei l'unità semplice:



Appositi simboli costituiti da cunei e angoli disposti in determinati modi indicavano ciascuno i seguenti numeri: 1, 10, 60, 600, 3'600, 36'000. Ad esempio, il 600 veniva rappresentato con due cunei perpendicolari nel seguente modo:

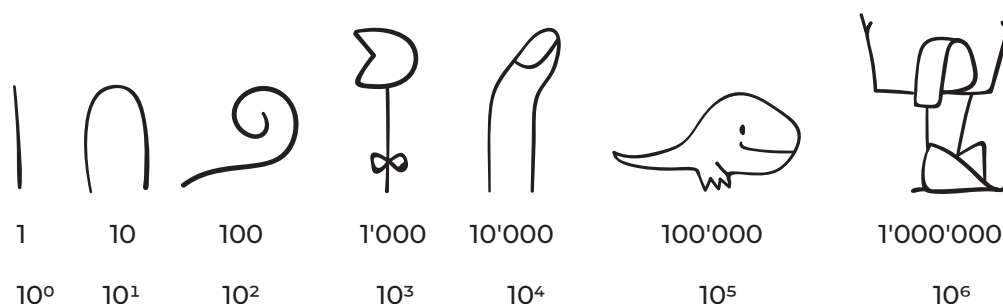


Solo al tempo di Alessandro Magno, nel IV secolo a. C., comparvero due cunei inclinati per indicare una posizione vuota per lo zero che veniva messa solo nelle posizioni intermedie, ma mai alla fine di un numero. Per le difficoltà implicite del sistema, la matematica di quelle civiltà rimase dominio quasi esclusivo della classe sacerdotale, depositaria della cultura e del potere.

Egizi. Assai florida fu la lunghissima e pacifica civiltà egizia che si sviluppò attorno al fiume Nilo, considerato un vero e proprio dono degli dèi. Per quanto riguarda l'aritmetica, gli antichi Egizi utilizzarono due diverse modalità di scrittura, la geroglifica e la ieratica, e svilupparono una grande sensibilità per le frazioni, purché il numeratore fosse rappresentato dall'unità.

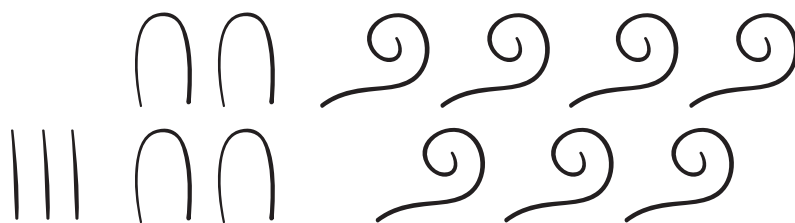
La scrittura geroglifica fu la più antica, databile tra il 3300 e il 2850 a. C.; tale scrittura era basata su un sistema additivo, nel quale i simboli venivano ripetuti tante volte quanto necessario e la loro posizione (anche se rispettata) non era determinante per interpretare il valore del numero rappresentato. Tale scrittura non faceva uso di alcun simbolo per lo zero e privilegiava il 10; esistevano infatti segni speciali per indicare ciascuna delle prime sette potenze di 10, e per questa ragione con le cifre geroglifiche egiziane era possibile rappresentare numeri fino ad oltre un milione.

I simboli dei numerali egizi di tipo geroglifico erano i seguenti:

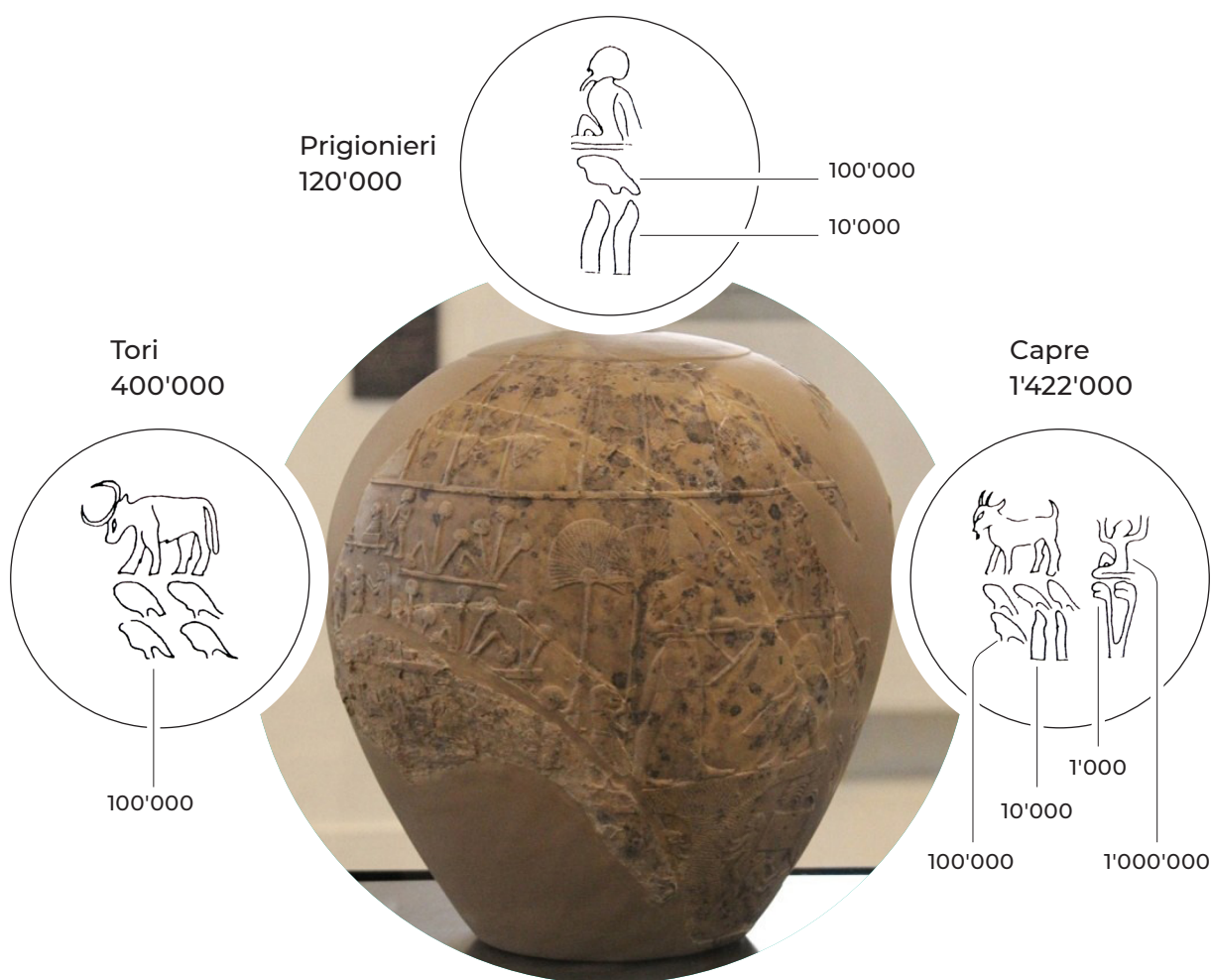


Simboli dei numerali egizi di tipo geroglifico.

I simboli di ordine decimale più elevato erano scritti a destra di quelli di ordine minore. Il numero 743 veniva quindi rappresentato nella sequenza come se fosse scritto, nella nostra attuale scrittura, 347.



La scrittura numerale di quel lontano periodo storico è testimoniata dai papiri e dai documenti arrivati fino a noi e salvatisi dalle varie e ripetute distruzioni belliche. Il più citato è il cosiddetto “papiro di Ahmes” o “di Rhind”, datato 1650 a. C. e rintracciato solo nel 1858. Tra i più curiosi documenti ritrovati, ricordiamo l'estremità di una mazza risalente all'inizio del III millennio a. C. che contiene la registrazione dei bottini di guerra del faraone Narmer: ben 400'000 bovini, 1'422'000 ovini e 120'000 prigionieri.



“Mazza del faraone Narmer” che quantifica il suo bottino di guerra.

Questa era la forma geroglifica di scrittura dei numerali più diffusa, ma non era univoca; in diverse epoche, in diversi luoghi e su diversi materiali, si sono trovate anche forme di scrittura assai diverse.

Ben nota è inoltre la cosiddetta stele di Nefertiabet (figlia del faraone Cheope, morta attorno al 2590 a. C.) che rappresenta ed enumera i beni che la sua anima portò con sé nel passaggio al regno dei morti.



Stele di Nefertiabet: elenco numerato dei regali che si fecero alla sua anima.

Alla scrittura geroglifica, ingombrante, difficile, lenta e faticosa, si contrappose l'assai più snella scrittura "ieratica". Tale scrittura ieratica veniva usata più spesso di quella geroglifica sia dai sacerdoti sia dagli scribi, soprattutto per effettuare conti, stendere censimenti, inventari, rapporti, testamenti, in atti amministrativi ecc.

Ecco i simboli ieratici che appaiono nel papiro di Rhind:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	20	30	40	50	60	70	80	90
100	200	300	400	500	600	700	800	900
1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000

Simboli numerici della scrittura ieratica egizia.

Romani. Un'altra bella eredità arrivata fino a noi è il sistema numerico romano, del quale vediamo ancora oggi esempi in lapidi e colonne disseminate in gran parte di quel mondo che fu conquistato da Roma. Tale sistema è estremamente laborioso: le lettere rappresen-

tavano i numeri, ma non venivano considerate tutte, però, come invece accadeva presso i Greci. I segni grafici usati dai Romani avevano origini greche ed erano i seguenti: I è 1, V è 5, X è 10, L è 50, C è 100, D è 500, M è 1'000.

I multipli di I, X, C e M si esprimevano ripetendo i segni corrispondenti, ma solo fino a quattro volte: IIII cioè 4 volte 1, MM cioè 2 volte 1'000 ecc.

I numeri scritti a destra di un numero superiore andavano sommati allo stesso; si trattava dunque di un sistema additivo:

$$XII = 10 + 2 \times 1 = 12,$$

$$MCCLXXXVI = 1'000 + 2 \times 100 + 50 + 3 \times 10 + 5 + 1 = 1'286$$

Più tardiva è l'idea sottrattiva: i segni I, X, C, se posti a sinistra di un numero superiore, indicavano che dovevano essere sottratti a quel numero:

$$IV = 5 - 1 = 4, \quad CD = 500 - 100 = 400$$

Il segno D si trova a volte sostituito da IO; aggiungendo ancora il segno O a destra, il numero si intendeva moltiplicato per 10: IO = 500, IOO = 5'000, IOOO = 50'000.

Allo stesso modo, il segno M poteva essere scritto CIO; per moltiplicare per 10, 100 ecc. si aggiungeva una coppia di segni da ambo le parti:

$$CIO = 1'000$$

$$CCIOO = 10'000$$

$$CCCIOOO = 100'000$$

La moltiplicazione per mille si indicava sopralineando il numero:

$$XL = 40 \text{ e } \overline{XL} = 40'000; \quad L = 50 \text{ e } \overline{L} = 50'000$$

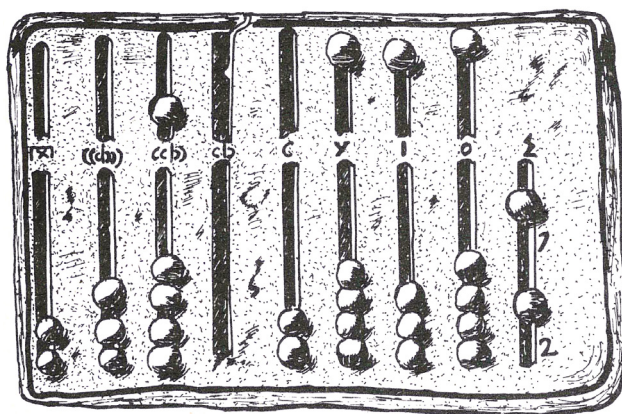
Infine, se oltre alla sopralineatura, il numero era sbarrato da ambo le parti, si intendeva moltiplicato per 100'000:

$$|\overline{V}| = 500'000, \quad |\overline{C}| = 10'000'000$$

I segni ausiliari |, $\overline{\quad}$, $\overline{\quad}$ risultavano molto efficienti per rappresentare numeri con le ultime cifre uguali a zero; ma si pensi di dovere scrivere, ad esempio, 1'849'679: un'impresa! Alla scrittura complessa delle entità numeriche, si sovrapponeva un'altra notevole difficoltà, di tipo algoritmico. Per rispondere a queste problematiche, i Romani, come i Greci e senz'altro gli Etruschi, dovettero dunque ricorrere a macchine da calcolo, gli abachi (si veda il contenuto [Strategie di calcolo](#)).

1	I
2	II
3	III
4	IIII, IV
5	V
6	VI
7	VII
8	VIII
9	VIIII, IX
10	X
11	XI
12	XII
13	XIII
14	XIV
15	XV
16	XVI
17	XVII
18	XVIII
19	XIX
20	XX
30	XXX
40	XL
50	L
60	LX
70	LXX
80	LXXX
90	XC
100	C
200	CC
300	CCC
400	CD
500	D, IO
600	DC
700	DCC
800	DCCC
900	CM
1000	M, CIO
2000	MM, CIOCIO, $\overline{II}$
10'000	CCIOO, $\overline{X}$
100'000	CCCIOOO, $\overline{C}$
1'000'000	CCCCIOOOO, $ \overline{XI} $

*Rappresentazione
di alcuni numeri romani.*



Rappresentazione di un antico abaco.

Maya. Tra i diversi sistemi di numerazione che si sono sviluppati nella storia, certamente uno dei più interessanti è quello della civiltà maya, che fiorì fra il 300 a. C. e il 900, in quello che fu detto il periodo classico, in una zona situata oggi nella parte meridionale del Nordamerica e nel Centroamerica. A questo periodo seguì quello postclassico che durò fino alla conquista spagnola del XVI secolo.

Il sistema maya era posizionale, un sistema cioè in cui il valore delle cifre è determinato dalla loro posizione nella scrittura del numero, e si basava su una base mista: la 5 e la 20 insieme, ma con prevalenza della 20.

Il 5 rappresenta le dita di una mano o dei piedi, il 20 l'intero numero delle dita del corpo umano (mani più piedi); in effetti, nella storia molte tribù che non usavano le scarpe hanno sfruttato anche le dita dei piedi per poter contare e per questo ragionavano in base 20.

Come strumenti per contare, i Maya utilizzavano fagioli (in spagnolo: *frijolitos*) o chicchi di mais o legnetti (in spagnolo: *palitos*). Usavano quindi solo 3 diverse cifre: il fagiolo per indicare l'1, il legnetto per indicare il 5 e un simbolo per lo zero.

Recenti studi concordano nel riconoscere che furono proprio i Maya i primi a utilizzare in modo esplicito lo zero come numero; esso veniva rappresentato in diversi modi, e lo si chiamava a volte "ombelico", ma più spesso "conchiglia".

0	1	2	3	4
	●	● ●	● ● ●	● ● ● ●
5	6	7	8	9
	● 	● ● 	● ● ● 	● ● ● ●
10	11	12	13	14
 	● 	● ● 	● ● ● 	● ● ● ●
15	16	17	18	19
 	● 	● ● 	● ● ● 	● ● ● ●

I numeri maya da 0 a 19.

Questa notazione numerica posizionale andava dal basso verso l'alto, invece che da destra a sinistra come la nostra, incolonnando i simboli verticalmente. Il primo livello o ordine indicava le unità, il secondo livello, che si trovava sopra il primo, indicava le ventine, il terzo livello rappresentava l'ordine di grandezza 20×20 e così via. In realtà spesso si utilizzava come terzo livello, al posto di 20×20 , 20×18 (360), sotto l'influenza dal conteggio del tempo che, nella vita maya, era davvero importante. La posizione che per noi è rappresentata da decine per loro era rappresentata da ventine.

Il 20 nel sistema maya veniva quindi rappresentato nel seguente modo, zero unità e una ventina (il numero viene letto dal basso verso l'alto):



Rappresentazione del numero 20 nel sistema maya.

Rappresentazione di alcuni numeri maggiori di 20 con il sistema maya:

(8'000)						• • •
(400)			•	•	• •	• — — —
(20)	•	• •	• •	—	• • —	• — — —
(UNITÀ)	• — — —	• — — —	—	• • • —	• • • — —	• • • — — —
	20	40	445	508	953	30'414

Alcuni numeri maggiori di 20 rappresentati con il sistema numerico maya.

4.4 ORDINAMENTO

I numeri che si ottengono a partire da 0 aggiungendo sempre un'unità, si chiamano numeri naturali $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$; l'insieme dei numeri naturali è solitamente indicato con $\mathbb{N}$. Il più piccolo numero naturale è dunque 0. Nessuno sa il perché di questo nome: "naturale"; si può ipotizzare che ciò dipenda dal fatto che sono i più semplici, quelli che vengono più spontanei, che sono i più... naturali, appunto! (Forse il nome deriva dal voler tenere la contabilità degli oggetti che è una delle prime attività dell'essere umano).

I numeri naturali sono totalmente ordinati secondo una relazione d'ordine "minore" ($<$) o "minore o uguale" ($\leq$), dato che ogni numero si ottiene dal precedente aggiungendo 1. Il numero naturale $n + 1$, costruito a partire da n , si chiama *successivo di n* , mentre il numero naturale $n - 1$ si chiama *precedente di n* , ma ovviamente solo nel caso in cui n è maggiore di 0. L'ordinamento dei numeri naturali ha la seguente caratteristica: ogni numero possiede un successivo: 4 è il successivo di 3, 5 è il successivo di 4 ecc. Tra due numeri successivi, inoltre, in mezzo non c'è nulla. Questo significa che l'insieme $\mathbb{N}$ è discreto.

Per i numeri naturali è sempre possibile effettuare il confronto tra due qualsiasi numeri n e m e si verifica uno solo dei seguenti tre casi:

$$n > m, n < m, n = m \text{ (legge di tricotomia).}$$

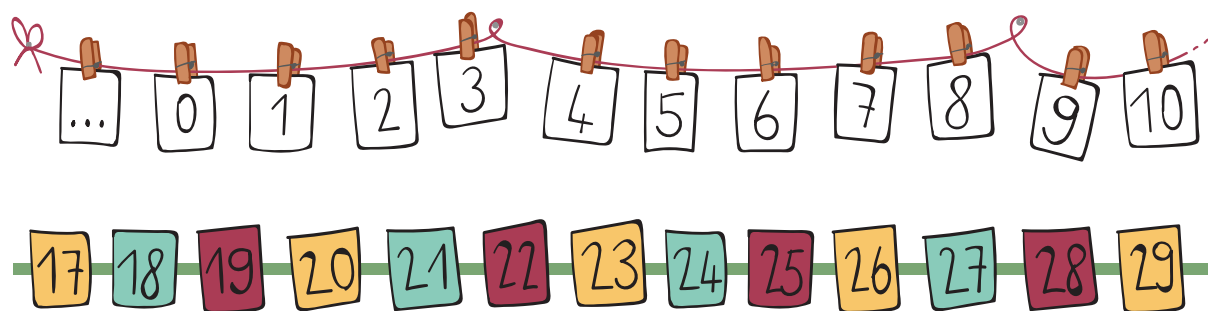
Approfondimento. La relazione d'ordine "minore" ($<$) o "minore o uguale" ($\leq$) e i concetti di precedente e successivo di un numero sono definiti anche nell'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$ $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$, essendo un insieme discreto come l'insieme dei numeri naturali. Nell'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ (frazioni o numeri decimali), invece, vale sempre la relazione d'ordine "minore" ($<$) o "minore o uguale" ($\leq$), ma non i concetti di precedente e successivo, essendo $\mathbb{Q}$ denso e non discreto (si veda l'argomento [Interpretazione dei numeri razionali](#)).

Aspetti didattici. Nella scuola elementare i bambini imparano l'ordinamento dei numeri naturali disponendoli dal più piccolo al più grande.

Uno strumento didattico assai vincente per concepire i numeri naturali in ordine crescente, ma da non considerare come univoco, è la linea dei numeri. Questo notevole strumento va costruito passo passo con i bambini. I modi per realizzare la linea dei numeri, che spesso diventa una retta, possono essere vari: tramite un lungo foglio di carta; con filo, mollette e numeri di cartone; con pedine da sistemare sul pavimento; "vivente", ogni bambino rappresenta un numero ecc. Se la linea dei numeri viene costruita tramite un foglio di carta è possibile appenderla alle pareti dell'aula in modo che possa accompagnare l'apprendimento numerico degli allievi per un lungo periodo. La linea va costruita in modo che non dia ai bambini l'idea che inizi da una parte e finisca in un'altra. Si segnano sulla striscia di carta tanti punti alla stessa distanza e si attaccano qua e là alcuni numeri in base alle esperienze che vengono vissute in classe così da arricchirla sempre più. Lo "0", non deve essere posto all'inizio della striscia di carta, per dar modo ai bambini di poter pensare (in futuro, quando ciò avverrà spontaneamente) che ci sono "altri" numeri al di qua di quello "0" e così anche tra un numero naturale e il successivo si potrebbe lasciare dello spazio per inserire nel secondo ciclo nuovi numeri, i razionali. Si potrebbero eventualmente disegnare i puntini a destra e a sinistra della linea per fare capire che i numeri continuano in entrambi i versi. È infatti importante preparare il terreno con gli allievi a ciò che avverrà in seguito dal punto di vista matematico, senza fornire delle nozioni agli allievi che in seguito saranno smentite; ciò allo scopo di non creare modelli rigidi negli allievi, che difficilmente in futuro si riusciranno a modificare. Esempi in tal senso sono le seguenti affermazioni che spesso vengono ribadite come vere per anni: "0 è il più piccolo numero che esiste"; "La linea dei numeri inizia da 0" (mostrando una semiretta invece di una retta); "Nella retta dei numeri a

sinistra dello 0 non c'è niente"; "Tra 0 e 1 non c'è nessun numero, così come tra 1 e 2, 2 e 3 e così via"; "Se ti allontani dallo 0 il numero diventa sempre più grande" (ciò non vale quando si passerà ai numeri negativi dove più ci si allontana dallo 0 più il numero diventa piccolo) ecc. Vale invece la pena anticipare ai bambini ciò che impareranno negli anni successivi, dicendo che 0 non è il più piccolo numero esistente, che la linea dei numeri è illimitata in entrambi i versi, che tra 0 e 1 ci saranno tanti altri numeri (non naturali ma di altro tipo che impareranno a conoscere negli anni successivi), che a sinistra dello 0 ci saranno tanti altri numeri (i numeri negativi, osservando in analogia ciò che si visualizza nell'ascensore o nel termometro della temperatura) ecc. Sapere ciò che avverrà permette di non creare rigidità negli allievi, li rassicura e permette di preparare gli apprendimenti futuri.

La disposizione dei numeri non deve però essere sempre e solo quella per ordine crescente, dal più piccolo al più grande. Se si considera un insieme finito di numeri naturali è ad esempio possibile disporre gli elementi in modo decrescente o disporli secondo altre fantasiose logiche (ad esempio disporre tutte le cifre dalla più bella alla più brutta, oppure mettere prima tutti numeri pari e poi tutti i dispari): i criteri possono essere i più disparati. Abituare gli allievi a concepire disposizioni diverse dei numeri può avvicinarli al concetto di successione e può aiutarli a comprendere corrispondenze biunivoche tra insiemi infiniti nei livelli scolastici successivi, anche quando gli elementi non seguono la disposizione classica per grandezza numerica.



Cenni storici. Risale a John Wallis nel XVIII secolo l'idea di utilizzare una retta per rappresentare l'ordine cosiddetto *naturale* dell'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi: in essa appare il valore 0 contrassegnato da un punto; a destra i numeri positivi +1, +2, +3 ecc., che si allontanano sempre più da 0, a sinistra, nell'ordine, i numeri negativi -1, -2, -3 ecc., che si allontanano in senso opposto. Tuttavia, nonostante avesse creato questo modello così esplicito di $\mathbb{Z}$, Wallis aveva un'idea assai personale del valore dei numeri negativi che non considerava minori di 0, ma maggiori dell'infinito. Tale artefatto è oggi molto diffuso fin dalla scuola elementare.

4.5 SUCCESSIONI

Una successione è una sequenza ordinata (e spesso infinita) di elementi, come ad esempio numeri, lettere, figure geometriche, giorni della settimana, note musicali, simboli.

Una successione modulare è una successione in cui un gruppo di elementi si ripete senza fine; gli elementi ripetuti costituiscono il modulo della successione. Ad esempio:

▲□●▲□●▲□●▲□●▲□●▲□●▲□●▲□●...

è una successione modulare il cui modulo è ▲□●, mentre questa

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆...

è una successione modulare con modulo ◆◆◆◆.

Si può quindi stabilire il modulo e chiedere di creare una successione, viceversa si può fornire una successione e chiedere di individuare il suo modulo.

Una *successione per ricorrenza* si ha quando ogni termine, escluso il primo che viene definito direttamente, dipende dal termine precedente. Cioè, dopo aver definito il primo elemento della successione, si stabilisce una regola che permette di calcolare il successivo. Prendiamo un numero di partenza, per esempio 1, e poi raddoppiamo sempre; otteniamo:

1 2 4 8 16 32 64 ...

Viceversa, se viene data una successione non sempre è facile capire qual è la regola che l'ha generata; per esempio:

1 3 7 15 31 63 127 ...

è stata ottenuta partendo da 1, poi raddoppiando e sommando 1.
Invece la seguente:

1 1 1 1 1 1 ...

è stata ottenuta partendo da 1 e poi facendo sempre il doppio meno 1; se invece di partire da 1 si fosse partiti da 3, con la stessa regola, avremmo trovato:

3 5 9 17 33 65 ...

Occorre inoltre considerare che i primi elementi di una successione possono nascondere più regole, quindi occorre avere l'elasticità di comprendere che quella individuata potrebbe non essere l'unica. Considerando due successioni, queste potrebbero avere i primi elementi in comune, ma in seguito, in base alla regola, potrebbero differenziarsi. Inoltre, ci sono anche *successioni casuali*, ottenute senza regole (anche se c'è chi dice che la regola ci sia: è quella di aver messo numeri a caso; ma qui si sconfina nella filosofia).

Aspetti didattici. Un'attività che può essere proposta in classe, e che può essere vissuta anche in forma ludica, consiste nel fornire una successione e chiedere qual è la regola o il modulo con la quale si è ottenuta e quali sono gli elementi che permettono di proseguirla. Occorre però stare molto attenti in questi casi perché, come già affermato, non è detto che la regola o il modulo siano unici: più regole o moduli possono dar luogo alla stessa successione o almeno ad una parte di essa.

Ad esempio, questa successione:

◆●●◆ ...

può proseguire in diversi modi:

- usando il modulo ◆●●: ◆●●◆●●◆●●◆●●◆●●◆●● ...
- usando il modulo ◆●●◆: ◆●●◆◆●●◆◆●●◆◆●●◆◆●●◆◆ ...
- usando il modulo ◆●●◆□: ◆●●◆□◆●●◆□◆●●◆□◆●●◆□ ...
- usando il modulo ◆●●◆□◆◆□: ◆●●◆□◆◆□◆●●◆□◆◆□◆●●◆□◆◆□ ...
- ...

Trovare la regola può in certi casi risultare un'attività creativa, stimolante, ma anche complessa, come per la seguente successione:

4 3 3 3 7 6 3 5 4 4 5 6 6 7 ...

La successione appare come casuale, eppure non lo è; basta pensare ai nomi dei numeri nella lingua italiana: zero, uno, due, tre ecc. e si scopre che i numeri della successione corrispondono al numero delle lettere dei nomi dei numeri disposti in ordine crescente. Queste proposte possono quindi diventare molto utili per aprire un dibattito in classe costruttivo e interessante.

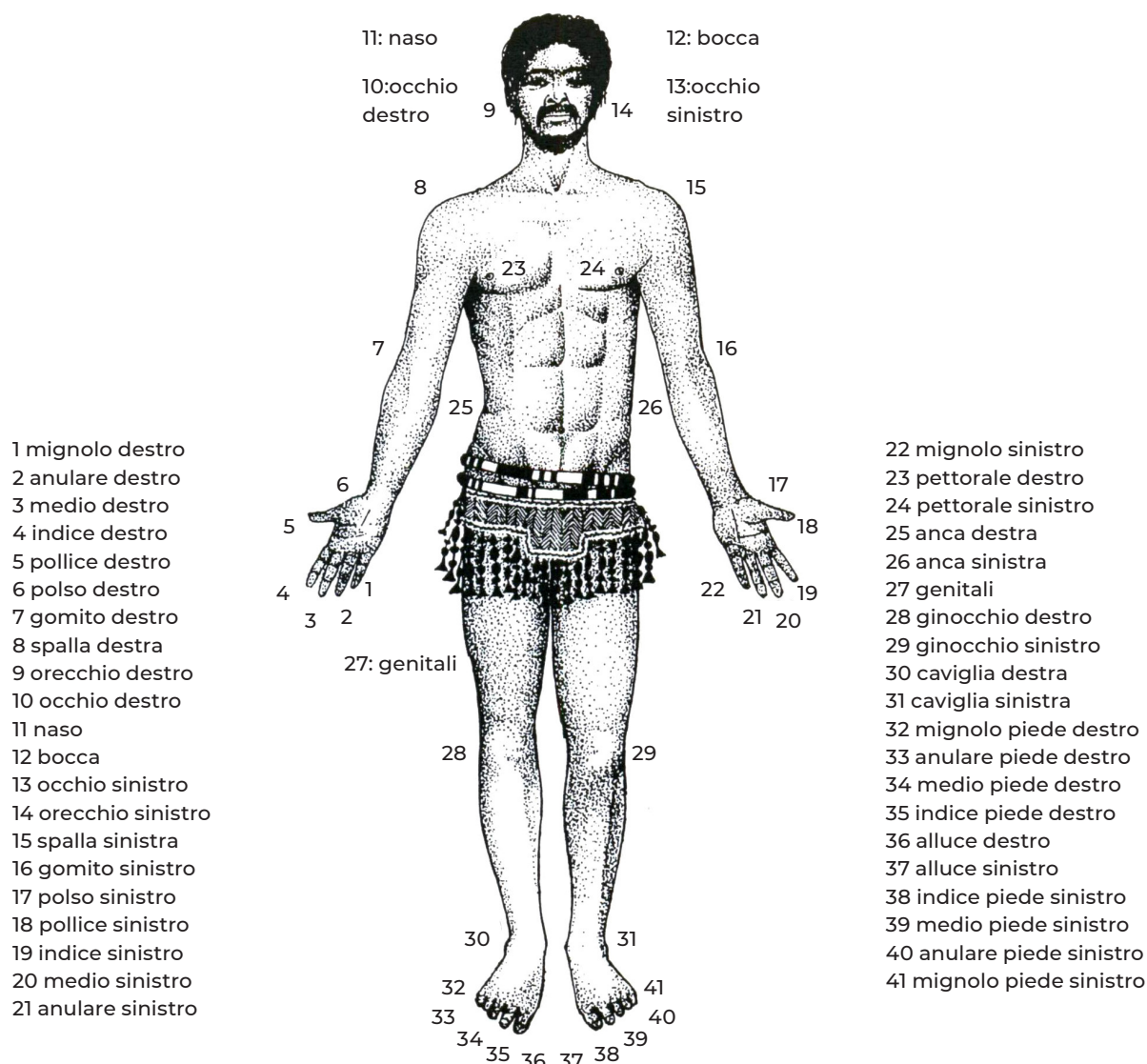
Data una successione si può chiedere agli allievi di trovare una regola; viceversa, data una regola, si può chiedere di continuare una successione di numeri; per rendere ancora più formative e motivanti queste proposte si può chiedere agli allievi di inventare le successioni da sottoporre ai compagni, così da collaborare tra pari.

Cenni storici. Per riuscire a enumerare, l'uomo si è servito, oltre alle dita delle mani, anche degli arti e delle diverse parti del corpo umano creando una sorta di successione.

I popoli che utilizzavano questo procedimento seguivano un ordine prestabilito, toccandosi in sequenza le diverse parti del corpo. In questo modo potevano elencare una raccolta costituita da un numero di oggetti corrispondenti al numero di riferimenti corporei della successione. Ad esempio, toccandosi il mignolo, l'anulare, il medio, l'indice e il pollice della mano destra, quindi il polso, il gomito, la spalla, l'orecchio e l'occhio dallo stesso lato, si poteva elencare una raccolta costituita da dieci oggetti. Nessuno di tali riferimenti corporei veniva visto come un "numero"; ossia, la semplice designazione di una parte del corpo non bastava a caratterizzare una certa quantità di oggetti se questa non era corredata dalla sequenza data dal toccare le varie parti del corpo.

Con questo procedimento alcune culture arrivavano a contare visivamente fino a 17, altre a 29, alcune a 33 e anche di più. Questo tipo di pratica era assai diffusa nel Medioevo, sia in Europa, sia in Asia, e come riferiscono vari antropologi, i Papua e gli Elema della Nuova Guinea, gli Ingua del Chaco in Paraguay, i Boscimani del Sudafrica e molti aborigeni africani, americani e oceaniani, lo utilizzavano ancora all'inizio del XX secolo.

Tali metodi di enumerazione legati alle parti del corpo erano superiori rispetto a procedimenti elementari come la pratica dell'intaglio o l'accumulo di sassi, perché non utilizzavano solo il principio della corrispondenza biunivoca, ma introducevano anche la nozione di successione, nella quale è implicita la nozione di ordine. La tecnica evolse nel tempo; successivamente, i popoli cominciarono ad associare le parti del corpo a numeri ben precisi, per cui si ampliò immensamente la possibilità di tenere una contabilità e avviare l'idea di conteggio. Inoltre, grazie al fatto che si considerava sistematicamente la stessa sequenza di parti del corpo per indicare la cardinalità dell'insieme di oggetti da trattare, questa successione diventava, grazie all'abitudine e alla memoria, sempre più astratta, ossia sempre più legata a una successione di numeri.



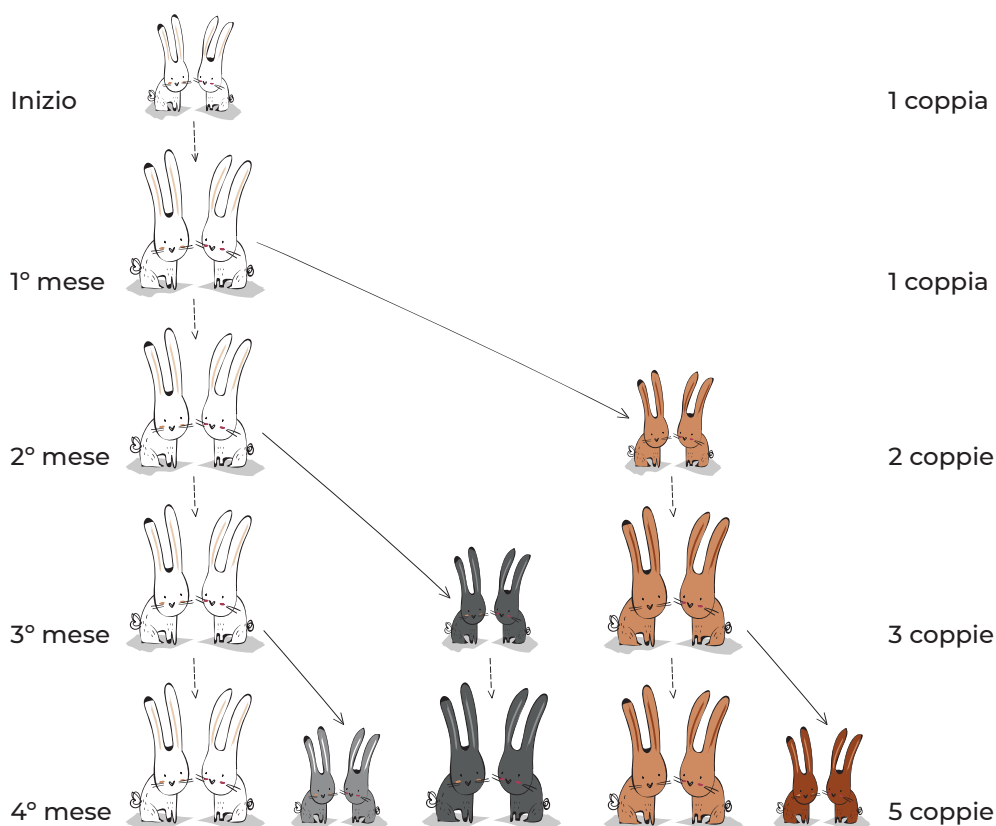
Esempio di enumerazione di parti del corpo umano.

Una delle successioni più note e famose al mondo è quella inventata dal matematico medievale Leonardo da Pisa (1170-1250), figlio di Bonaccio e perciò chiamato Fibonacci: si parte da un doppio 1 e poi si sommano sempre i due numeri precedenti:

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 ...

Fibonacci riuscì a individuare tale successione grazie al cosiddetto “problema dei conigli”. In esso si suppone di avere una coppia di conigli (maschio e femmina) neonati; il primo mese la coppia non procrea, perché troppo giovane; ma, a partire dal mese successivo e poi ogni mese, tale coppia genera una nuova coppia (maschio e femmina); questa coppia appena generata non può avere figli nel primo mese, ma poi comincerà a farlo dal secondo mese in poi, generando una nuova coppia (maschio e femmina) ogni mese; e così via. Si domanda quanti conigli si avranno in totale dopo un anno. Questa situazione resta definita appunto dalla *successione di Fibonacci*: 1 (1 coppia all'inizio), 1 (ancora 1 sola coppia dopo un mese), 2 (2 coppie dopo due mesi), 3 (3 coppie dopo tre mesi), 5 (5 coppie dopo quattro

mesi), 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233 (233 coppie dopo un anno). Ovviamente si può proseguire oltre: 377 coppie dopo il tredicesimo mese e così via.



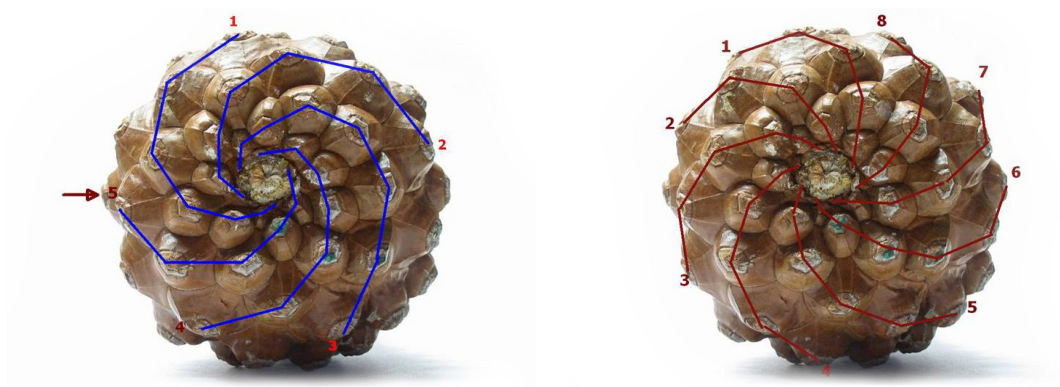
Rappresentazione del “problema dei conigli” di Fibonacci.

Questa straordinaria successione, ricca di proprietà, è molto presente in natura, in forme viventi e non viventi; per esempio, si ritrovano i numeri della successione nel numero di spirali di semi nella corolla di un girasole, di spirali di un ananas o di una pigna, nella struttura di un cavolfiore o della conchiglia del Nautilus. Dal punto di vista matematico va osservato che, calcolando i rapporti tra due numeri successivi della successione di Fibonacci, si trovavano valori sempre più vicini all'affascinante *numero aureo* o *numero ϕ di Fidia*, 1,618033988..., canone di bellezza e armonia.

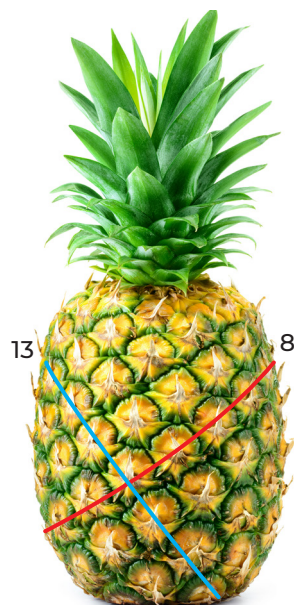
$$\begin{aligned}
 1/1 &= 1 \\
 2/1 &= 2 \\
 3/2 &= 1,5 \\
 5/3 &= 1,666666666 \\
 8/5 &= 1,6 \\
 13/8 &= 1,625 \\
 21/13 &= 1,61538461538 \\
 34/21 &= 1,61904761905 \\
 55/34 &= 1,61764705882 \\
 89/55 &= 1,61818181818 \\
 &\dots \\
 \phi &= 1,6180339887...
 \end{aligned}$$

Rapporti tra due numeri successivi della successione di Fibonacci tendente al numero aureo.

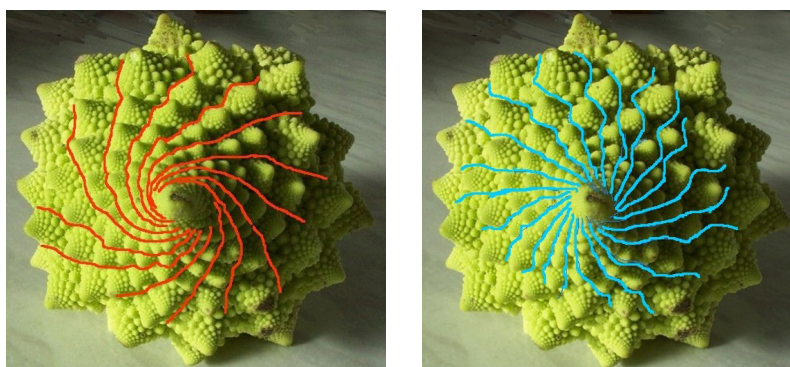
La natura sembra cioè comportarsi matematicamente in modo additivo, secondo la successione di Fibonacci, e il suo “tendere” è aureo.



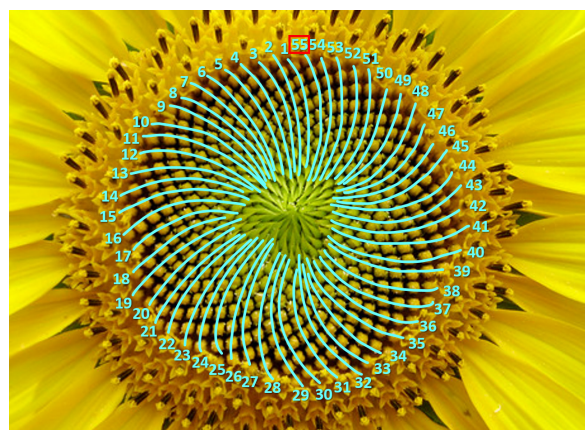
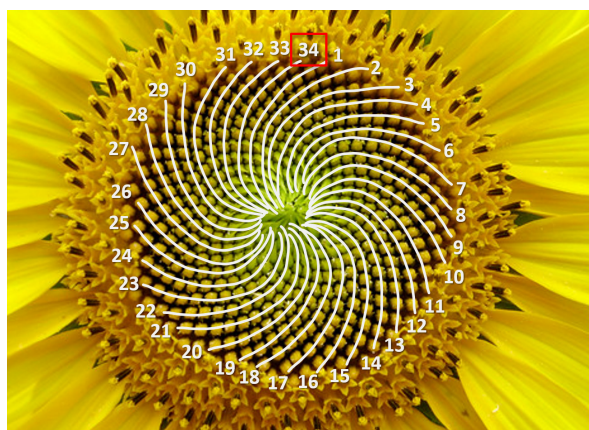
La successione di Fibonacci si trova nelle squame di una pigna: 5 spire ($2 + 3$) verso destra e 8 ($3 + 5$) verso sinistra.



L'ananas ha due serie di spirali della successione di Fibonacci: in questo caso 8 ($3 + 5$) verso destra e 13 ($5 + 8$) verso sinistra.



Nel cavolo romano si trovano alcuni elementi della successione di Fibonacci. In questo caso 13 ($5 + 8$) spirali verso destra e 21 ($8 + 13$) verso sinistra.



In questa specie di girasoli arriviamo a 34 spirali ($13 + 21$) verso destra e 55 spirali ($21 + 34$) verso sinistra.

4.6 SOTTOINSIEMI DEI NUMERI NATURALI

Un raggruppamento di oggetti rappresenta un *insieme* se esiste un criterio che permette di decidere univocamente se un qualunque oggetto faccia parte o meno del raggruppamento (ad esempio gli oggetti del raggruppamento sono elencati chiaramente oppure hanno tutti una proprietà comune che permette di individuarli).

Gli oggetti che compongono un insieme si dicono *elementi* di questo insieme.

Il mondo è pieno di insiemi! Ad esempio, i bambini che frequentano la stessa scuola creano un insieme, e ciascuno di loro rappresenta un elemento dell'insieme.

Un insieme A è detto *sottoinsieme* di un altro insieme B quando tutti gli elementi di A appartengono anche a B. Seguendo l'esempio, i compagni di una determinata classe della scuola creano un sottoinsieme dell'insieme costituito da tutti gli allievi della scuola. Se consideriamo l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$, costituito da infiniti elementi, si può individuare un numero infinito di suoi sottoinsiemi.

I sottoinsiemi possono essere finiti, ossia costituiti da un numero finito di elementi (ad esempio, l'insieme delle dieci cifre, i numeri compresi tra 5 e 20, estremi esclusi) o infiniti, ossia costituiti da infiniti elementi (ed esempio, l'insieme dei numeri pari, quello dei numeri dispari, dei numeri primi, dei numeri quadrati, dei multipli di 2, di 3, di 4 ecc.).

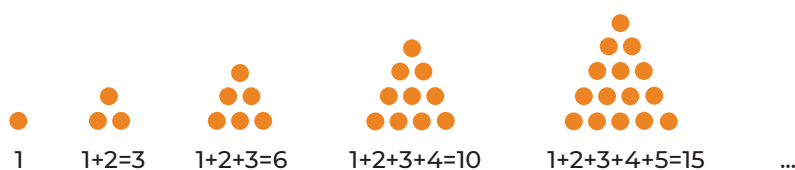
Aspetti didattici. Durante l'apprendimento numerico nella scuola elementare risulta importante approcciarsi a diversi sottoinsiemi dei vari insiemi numerici, in particolare ai sottoinsiemi dei numeri naturali, costituiti da un numero finito e infinito di elementi. Ciò permette di individuare interessanti proprietà dei numeri, di metterli in relazione tra loro, di stabilire la cardinalità dei sottoinsiemi, le analogie e le differenze tra un sottoinsieme e l'altro ecc.

Nel primo ciclo le attività vertono prevalentemente su insiemi costituiti da un numero finito di elementi, legati soprattutto a oggetti del mondo reale; nel secondo ciclo invece ci si può distanziare sempre di più dalla concretezza del reale, giocando prevalentemente con i numeri e addentrandosi a intuire e a manipolare insiemi costituiti da infiniti elementi, aumentando così in modo graduale l'astrazione dei concetti in gioco.

Cenni storici. L'uomo si è sempre interessato al mondo numerico, inizialmente legato a esigenze concrete e utilitaristiche che coinvolgevano insiemi costituiti da un numero finito di elementi e in seguito in modo sempre più astratto e ampio, arrivando a concepire anche insiemi costituiti da infiniti elementi.

Il matematico forse più famoso, legato all'idea di numero come essenza di tutte le cose, è Pitagora di Samo (ca. 585-497 a. C., sempre che sia mai esistito, il che è messo in discussione), noto soprattutto per il teorema relativo ai triangoli rettangoli che porta il suo nome. La posizione di Pitagora legata all'idea di numero veniva esaltata dalle rappresentazioni figurali dei numeri, che venivano realizzate mediante opportune configurazioni geometriche di monadi, entità più piccole possibili e indivisibili. Concretamente si può ipotizzare di disporre dei sassolini secondo determinate configurazioni geometriche e di indagarne gli aspetti numerici e le relative proprietà. Ancora oggi sono conosciuti i *numeri poligonali*: triangolari, quadrati, pentagonali; ma anche tetraedrici, piramidali ecc. Gli insiemi dei numeri poligonali sono costituiti da infiniti elementi.

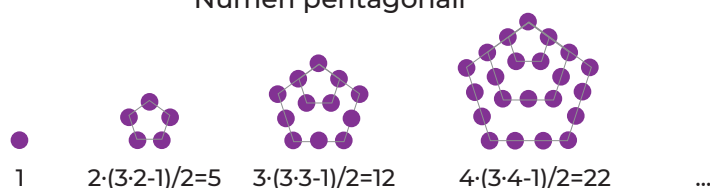
Numeri triangolari



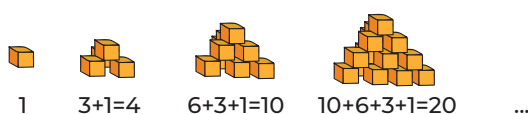
Numeri quadrati



Numeri pentagonali



Numeri tetraedrici



Numeri polinomiali (triangolari, quadrati, pentagonali e tetraedrici).

Tali numeri nascondono interessanti proprietà che possono diventare oggetto di riflessioni didattiche. È ovvio che ogni numero naturale è rappresentabile mediante una o più configurazioni rettangolari di monadi, tranne i numeri primi che sono rappresentabili unicamente da un'unica fila di monadi, avendo solamente due divisori.

Numeri composti e numeri primi



Riuscire a concepire e gestire insiemi costituiti da infiniti elementi è stata una lenta e faticosa conquista dell'essere umano, che ha attraversato millenni di storia. Da Aristotele, con il suo divieto di avere a che fare con l'infinito in senso attuale, per evitare paradossi, si è dovuti arrivare al 1870 circa con Cantor per riuscire a gestire con sicurezza le corrispondenze biunivoche tra insiemi infiniti, scoprendo così le cardinalità di questi insiemi (si veda il contenuto [Corrispondenza biunivoca](#)).

4.6.1 PARI E DISPARI

I numeri naturali si dividono in due grandi categorie, i pari e i dispari. Ogni numero appartiene certamente a una delle due categorie, e solo a una delle due; si dice che questi due insiemi sono disgiunti, ossia non hanno elementi in comune e la loro unione forma tutto l'insieme dei numeri naturali.

Come si fa a distinguere i pari dai dispari? Ebbene, basta dividerli per 2. Se l'operazione ha resto 0, il numero è pari; se l'operazione ha resto 1, il numero è dispari.

Un numero è quindi pari se è divisibile per 2, in caso contrario è dispari.

Il più piccolo numero pari è quindi 0, essendo 0 divisibile per 2, dato che $0 : 2$ fa 0 e il resto è 0.

Possiamo notare che i numeri naturali partono da 0, pari, e poi proseguono alternativamente con un dispari, un pari, un dispari, un pari e così via.

Ma se si ha un numero grande come 276'845'425, come si può stabilire se è pari o dispari senza fare una impegnativa divisione? Per decidere se quel numero è divisibile per 2, è sufficiente considerare solo l'ultima cifra, nel nostro caso solo il 5: poiché quest'ultima cifra è dispari, sarà dispari anche l'intero numero; questa verifica è più che sufficiente per stabilire la divisibilità per 2 di un numero.

Approfondimenti. Chiediamoci se ci sono più numeri nell'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ o nell'insieme dei numeri pari P .

A prima vista, si potrebbe pensare che in $\mathbb{N}$ ci sono più elementi che in P , dato che in $\mathbb{N}$ ci sono tutti i pari, ma anche tutti i dispari. Il ragionamento è legittimo, e appare corretto, ma ricordiamo che abbiamo a che fare con l'infinito, e tutto quel che siamo abituati a pensare sulle raccolte finite non è detto che valga per le raccolte infinite.

Per l'infinito, infatti, non è sempre vero che "il tutto è maggiore della sua parte".

Basta procedere con il metodo delle corrispondenze biunivoche per scoprire che ci sono tanti numeri naturali quanti numeri pari, ossia $\mathbb{N}$ e P hanno la stessa quantità di elementi. Scriviamo idealmente tutti i numeri naturali in una riga e, sotto, tutti i numeri pari:

$\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
P	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	...

Che cosa si nota? Che ad ogni numero naturale corrisponde un ben preciso numero pari, il suo doppio; o viceversa, a ogni numero pari corrisponde un ben preciso numero naturale, la sua metà. Dunque, si può creare una corrispondenza biunivoca tra gli elementi di $\mathbb{N}$ e di P , e possiamo così concludere, a sorpresa, che ci sono tanti numeri naturali quanti numeri pari. L'infinità dei numeri naturali si chiama: "infinità del numerabile".

Corrispondenze biunivoche possono essere trovate anche tra numeri naturali e dispari, tra naturali e numeri quadrati $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots\}$, tra naturali e multipli di un numero ecc. Dunque, i numeri naturali e un qualsiasi sottoinsieme di $\mathbb{N}$ costituito da infiniti elementi posseggono lo stesso tipo di infinità del numerabile.

La corrispondenza biunivoca tra i numeri naturali $\mathbb{N}$ e i numeri quadrati è stata messa in evidenza da Galileo Galilei (1564-1642) e fu detta *paradosso di Galilei* (si veda il contenuto [Corrispondenza biunivoca](#)).

Aspetti didattici. Le occasioni per far emergere la differenza tra numeri pari e dispari non mancano nella quotidianità della vita di classe, ad esempio quando è necessario disporsi in fila per due per uscire dall'aula, quando devono formarsi due squadre con lo stesso numero di giocatori ecc. I bambini spesso si accorgono da soli che in alcuni casi è possibile dividersi a metà, mentre a volte “avanza un compagno” o “serve un compagno in più”.

Queste osservazioni spontanee possono essere formalizzate nei primi due anni di scuola elementare introducendo i numeri pari e i numeri dispari prevalentemente come alternanza dei numeri, senza dimenticare lo zero, che rappresenta il più piccolo numero naturale.

Per far intuire agli allievi la differenza tra questi due insiemi numerici può essere approcciata già nel primo ciclo la divisibilità dei numeri per 2, ma questo aspetto deve poi essere consolidato e formalizzato nel ciclo successivo, tramite il concetto di *divisibilità*. In entrambi i cicli è possibile proporre giochi e attività che vertono su questi insiemi e nel secondo ciclo è importante far intuire agli allievi che vi sono tanti numeri naturali quanti numeri pari o dispari.

4.6.2 NUMERI PRIMI

Anche per definire l'insieme dei numeri primi occorre prendere in considerazione la divisibilità nei numeri naturali: un numero si dice primo quando ha esattamente due divisori distinti. Per esempio, 7 è un numero primo, perché ha esattamente due divisori, cioè 1 e 7. Mentre 4 non è primo, in quanto ha tre divisori: 1, 2, 4.

Ripercorrendo la successione dei numeri naturali partendo dal primo, si nota che il numero 0 non è primo dato che ha infiniti divisori (tutti i numeri, tranne sé stesso). Il numero 1 non è primo, dato che ha solo un divisore: 1. Il numero 2 è primo, dato che ha esattamente due divisori, 1 e 2, ed è l'unico primo che è anche pari. Il numero 3 è primo, dato che ha esattamente due divisori: 1 e 3. I primi numeri primi, nell'ordine, sono 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 ecc. I numeri naturali maggiori di 1 che non sono primi si dicono composti.

Approfondimenti. I numeri primi assumono un'importanza fondamentale in aritmetica, in quanto sono alla base della struttura moltiplicativa dei numeri naturali. Tramite la moltiplicazione di numeri primi è infatti possibile ottenere tutti i numeri naturali e tali fattorizzazioni (moltiplicazione di numeri) risultano uniche.

Il Teorema Fondamentale dell'Aritmetica assicura infatti che ogni numero naturale si può ottenere moltiplicando fra loro opportuni numeri primi in uno e un solo modo, a parte l'ordine in cui i fattori sono presi.

I numeri primi rivestono oggi un ruolo molto importante in diversi ambiti della matematica: in geometria, in algebra e nella matematica applicata (in particolare nella crittografia). La crittografia si occupa delle “scritture nascoste”, ossia dei metodi per rendere un messaggio non comprensibile a persone non autorizzate a leggerlo. Le password che utilizziamo tutti i giorni, come quelle dei bancomat o dei sistemi informatici, si basano proprio sui numeri primi.

I numeri primi sono infiniti, lo aveva già dimostrato Euclide nel IV secolo a. C., ma come sono disposti i numeri primi all'interno dell'insieme dei numeri naturali rimane un problema aperto della matematica anche oggi.

Alcune curiosità: sono stati definiti i numeri primi “gemelli”, che sono coppie di numeri primi che, nella successione numerica di $\mathbb{N}$, hanno “distanza” tra loro solo di un posto, come 5 e 7, 17 e 19, ..., interessante può essere cercarli, ma non è un'impresa facile. Inoltre, il più

grande numero primo individuato fin ad ora, contiene 23'249'425 cifre ed è esprimibile come: $2^{82'589'933} - 1$.

Aspetti didattici. È importante introdurre i numeri primi nel secondo ciclo della scuola elementare, allo scopo di preparare il terreno per il livello scolastico successivo, stando però attenti a come vengono definiti. A volte si afferma che: “un numero naturale è primo se è divisibile per 1 e per sé stesso”, ma con questa definizione, 1 sarebbe primo, dato che ha come divisori solo 1 e sé stesso. Nel mondo greco ciò era evitato dal fatto che 1 non era considerato un numero (il numero è molteplicità), men che meno 0, dunque si doveva iniziare l'analisi da 2 (che è appunto il più piccolo numero primo). Nelle moderne definizioni, per evitare di porre 1 fra i numeri primi si ricorre o a limitazioni (un numero naturale $n \geq 2$ è detto primo se...), oppure si è costretti a fornire definizioni del tutto diverse (un numero naturale è detto primo se ha esattamente due divisori distinti; in tal caso, 0 non è primo, dato che ha infiniti divisori, tutti i naturali tranne sé stesso; 1 non è primo, dato che ha un solo divisore, sé stesso). Una volta compreso che cosa si intende per numeri primi, è possibile proporre attività, pratiche e giochi che coinvolgono tali numeri e le loro particolari caratteristiche, come ad esempio la costruzione del *crivello di Eratostene* (si veda il paragrafo seguente sui cenni storici).

Cenni storici. I numeri primi hanno origine antichissima, secondo alcuni studiosi le tacche sulla superficie del cosiddetto osso *Ishango*, risalente a circa 20'000 a. C., sono collegate ai numeri primi.



Osso Ishango, Real Museo di Scienze Naturali, Bruxelles, del 20'000 a. C.

I numeri primi sono stati molto studiati nell'antichità, specialmente dal grande Pitagora di Samo nel VI secolo a. C. che ne individuò importanti proprietà anche grazie all'aritmo-geometria, ossia allo studio dei numeri attraverso la disposizione figurale degli elementi (a forma rettangolare, triangolare, quadrata ecc.), unendo così l'aritmetica con la geometria (si veda l'argomento [Sottoinsiemi dei numeri naturali](#)).

Successivamente, con una dimostrazione molto elegante, Euclide di Alessandria, nel III secolo a. C., mostrò che: «Dato un numero per quanto grande di numeri primi, se ne possono trovare degli altri»; ossia che: «I numeri primi sono infiniti».

Ma certamente i numeri primi sono associati a Eratostene che nel III a. C. propose il cosiddetto crivello, o setaccio, usato, appunto, per “setacciare” i numeri primi, estraendoli da insiemi finiti di numeri naturali.

Riportiamo un esempio di applicazione del crivello di Eratostene per i numeri primi minori di 100. 0 non è primo, avendo infiniti divisori, così come 1 che ha un solo divisore, cioè sé stesso. 2 è il primo numero primo, avendo due divisori distinti: l'1 e il 2.

Scriviamo quindi in una tabella ordinatamente i numeri naturali da 2 a 100, o se si vuole da 0 a 100, ma in questo caso i primi due numeri vanno cancellati perché non sono primi.

	②	③	4	⑤	6	⑦	8	9	10
⑪	12	⑬	14	15	16	⑰	18	⑲	20
21	22	⑳	24	25	26	27	28	㉑	30
㉓	32	33	34	35	36	㉗	38	39	40
㉙	42	㉛	44	45	46	㉝	48	49	50
51	52	㉞	54	55	56	57	58	㉟	60
㊱	62	63	64	65	66	㊲	68	69	70
㊴	72	㊶	74	75	76	77	78	㊸	80
81	82	㊺	84	85	86	87	88	㊻	90
91	92	93	94	95	96	㊼	98	99	100

Crivello di Eratostene per i primi 100 numeri naturali.

Prendiamo in considerazione il 2 che è il più piccolo numero primo. Ne consegue che tutti gli altri multipli di 2 saranno composti, ossia avranno certamente più di due divisori, come minimo l'1, il 2 e il numero che si sta considerando; pertanto, possiamo togliere dalla tabella, far passare al setaccio, tutti gli altri multipli di 2, non essendo sicuramente primi. Abbiamo così quanto resta dopo la prima "setacciatura".

Ripetiamo il procedimento con il numero 3, che è il successivo primo, lasciando nella tabella il 3 stesso e cancellando tutti gli altri suoi multipli.

Il procedimento deve essere ripetuto ora, eliminando tutti i multipli di 5 a parte 5 stesso, di 7, di 11 ecc. cioè dei successivi primi che restano.

I numeri naturali che rimangono sono tutti i numeri primi minori di 100:

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97.

I numeri primi non furono trattati solo dal mondo greco; essi furono infatti studiati con grande profondità anche dagli arabi. Sono stati inoltre tanti i matematici illustri dal XVI secolo ad oggi (come Mersenne, Fermat, Goldbach, Euler, Gauss, Riemann, Hadamard, de La Vallée-Poussin), che si sono occupati di questi interessanti numeri, dando vita anche a congetture, alcune delle quali rimaste problemi aperti della matematica. Questo fa sì che i numeri primi continuino ad essere studiati anche oggi.

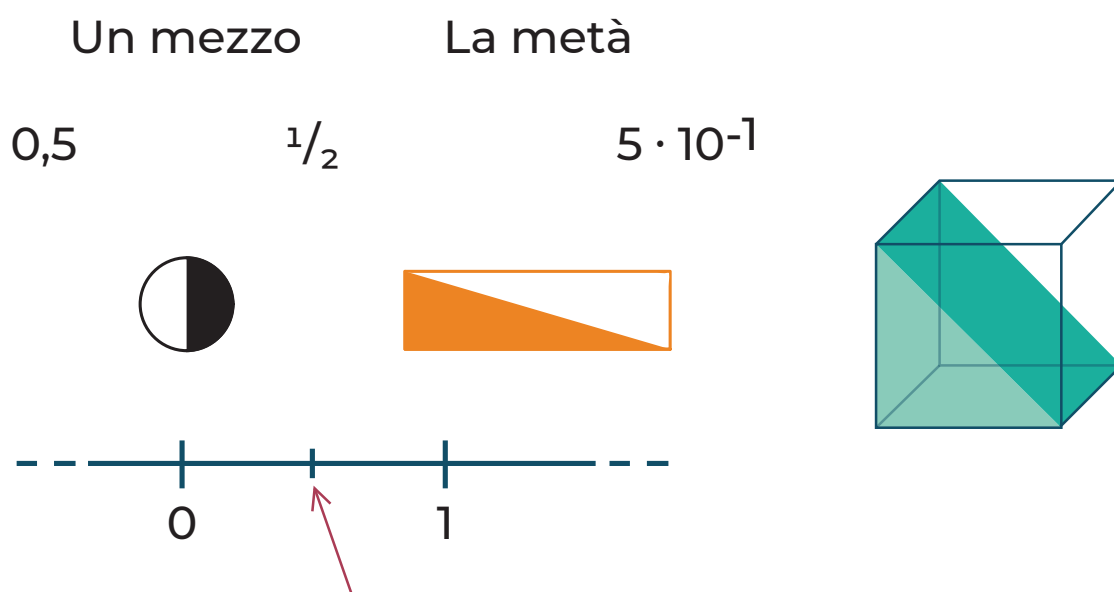
Da oltre due millenni i matematici si chiedono ad esempio quale sia la distribuzione dei numeri primi all'interno dell'insieme dei numeri naturali; di tanto in tanto qualche matematico, anche illustre, ha proposto regole per la determinazione dei primi, ma sempre fallendo. I numeri primi sono infiniti, lo aveva già dimostrato Euclide nel IV secolo a. C., ma come sono distribuiti questi numeri è ancora un problema aperto della matematica, uno dei problemi più famosi al mondo.

4.7 INTERPRETAZIONI DEI NUMERI RAZIONALI

Nell'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ si possono fare tutte le addizioni e tutte le moltiplicazioni, ma proprio tutte! Queste due operazioni sono per questo dette interne all'insieme; ma per riuscire a fare tutte le sottrazioni, anche quelle che hanno il sottraendo minore del minuendo, del tipo $2 - 5$, bisogna ampliare $\mathbb{N}$ e passare a $\mathbb{Z}$, ossia all'insieme dei numeri interi {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}. Questo insieme considera anche i numeri interi negativi, argomento intuito fin dalla scuola elementare per la presenza di tali numeri nel mondo reale (ascensore, temperatura), ma trattato aritmeticamente nella scuola media.

Resta però il problema di voler effettuare tutte le divisioni senza dover parlare di resto. Per riuscirci, occorre ampliare l'insieme $\mathbb{N}$ e passare a $\mathbb{Q}$, l'insieme dei numeri razionali; un nuovo mondo per gli allievi, che amplia il precedente. In questo nuovo insieme possiamo finalmente eseguire tutte le divisioni!

I numeri razionali, cioè gli elementi appartenenti all'insieme $\mathbb{Q}$, si possono rappresentare tramite diversi registri: figurale, aritmetico, algebrico ecc. Le forme aritmetiche più note per rappresentare questi numeri sono le frazioni e i numeri decimali. Le frazioni e i numeri decimali sono quindi due forme di scrittura diverse per rappresentare i numeri razionali; ad esempio 0,5 e $\frac{1}{2}$ rappresentano lo stesso numero razionale, ma non solo, vi sono infinite frazioni equivalenti che rappresentano lo stesso numero razionale ($\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{6}{12}$ ecc.), così come esistono molte altre rappresentazioni dello stesso concetto espresse in altri registri: figurali, pittorici, a parole ecc.



Rappresentazioni diverse per lo stesso numero razionale: la metà.

C'è una bella differenza quindi tra un numero razionale e una frazione, anche se spesso si confonde l'uno con l'altra.

Il numero razionale non è la frazione (per esempio $\frac{3}{4}$), ma è la raccolta (infinita) di tutte le frazioni equivalenti a $\frac{3}{4}$. Quindi, in un certo senso, il numero razionale $\frac{3}{4}$ è la frazione $\frac{3}{4}$, ma insieme a tutte le frazioni del tipo $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{15}{20}$, $\frac{30}{40}$ ecc. equivalenti a $\frac{3}{4}$. Quando si parla di numeri razionali, naturalmente non è che uno si porti dietro infinite frazioni ogni volta; se ne sceglie una come rappresentante e si lavora su quella. Di solito si sceglie quella "ridotta ai minimi termini", cioè quella con i numeri più piccoli.

L'insieme dei numeri razionali non è discreto come l'insieme dei numeri naturali, ma è denso: questo significa che, per quanto due frazioni si suppongano “vicine” l'una all'altra, tra esse vi sono infinite altre frazioni. Per questo motivo non esistono quindi in $\mathbb{Q}$ i concetti di precedente e successivo di un numero (si veda l'argomento [Ordinamento](#)).

Aspetti didattici. Fin da molto piccoli, i bambini si confrontano concretamente con i numeri razionali, quando ad esempio dividono una banana a metà per dividerla con un compagno o una barretta di cioccolata tra tre amici.

Dai primi mesi di scuola elementare è possibile indagare le concezioni spontanee dei bambini sul concetto di metà, o di altre intuitive frazioni, e sulla divisione di un tutto in parti, sia nel continuo sia nel discreto. È su queste concezioni intuitive che è possibile progettare significativi percorsi didattici fin dal primo ciclo.

Nel secondo ciclo tale apprendimento viene ulteriormente sviluppato grazie alla trattazione dei diversi modi di concepire questi numeri, approfondendo in particolare le diverse interpretazioni delle frazioni nei contesti di vita reale e le diverse rappresentazioni dello stesso numero razionale mettendole a confronto l'una con l'altra; per questa ragione abbiamo chiamato l'argomento “interpretazioni dei numeri razionali”.

In particolare, è importante far intuire agli allievi che la forma decimale e la forma frazionaria sono due modi diversi di rappresentare lo stesso numero, scoprendo così che $0,5$ e $\frac{1}{2}$ non sono numeri distinti, anche se le scritture sono differenti.

Vanno anche valutati con gli allievi i punti di forza e di debolezza di ciascuna rappresentazione e come questi variano in funzione del contesto: a volte risulta più intuitiva la rappresentazione frazionaria, come nel caso della probabilità tra casi favorevoli e casi possibili; altre volte la rappresentazione decimale, come quando si vuole posizionare un numero razionale su una retta numerica; altre ancora quella figurale ecc.

Nel secondo ciclo è importante mostrare agli allievi che l'insieme $\mathbb{Q}$ è denso, quindi non è possibile trovare il numero successivo di un numero razionale considerato, in quanto, anche se ne viene considerato uno, ce ne sarà sempre un altro più “vicino” rispetto a quello individuato. Ad esempio, il successivo di $0,6$ non è certamente $0,7$, perché ci sarebbe ad esempio $0,61$, ma anche $0,601$, o $0,6001$, o $0,60001$ e così via. Il successivo di un numero razionale non esiste, non c'è niente da fare!

4.7.1 FRAZIONI

Il tema delle frazioni è uno degli argomenti numerici più ampi e complessi della scuola elementare, in continuità con la scuola media.

Consideriamo tutti i numeri naturali $\mathbb{N}$ e poi tutte le scritture del tipo $\frac{a}{b}$, dove sia a sia b sono numeri naturali, per esempio: $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{7}$, $\frac{9}{3}$, $\frac{0}{5}$, $\frac{4}{12}$, ...

Tutte queste scritture aritmetiche sono frazioni, che non sono altro che un modo di rappresentare i numeri razionali. Abbiamo infiniti modi di rappresentare un numero razionale tramite le frazioni, grazie alle frazioni equivalenti. Inoltre, la frazione $\frac{a}{b}$ rappresenta la divisione $a : b$, quindi b non può essere 0 , dato che lo 0 non può mai essere un divisore. Infatti, consideriamo un qualsiasi numero naturale a non nullo; se si potesse dividere a per 0 , allora esisterebbe un numero razionale c , tale che $c \times 0 = a$. Ma questo sarebbe possibile solo se a fosse 0 , e questo genera una contraddizione (si veda il contenuto [Divisione](#)).

La sesta frazione ($\frac{4}{12}$) ridotta ai minimi termini è $\frac{1}{3}$.

Facciamo inoltre notare che la terza frazione nell'elenco precedente ($\frac{7}{7}$) può essere pensata come una rappresentazione del numero 1 , la quarta frazione ($\frac{9}{3}$) del 3 , la quinta frazione ($\frac{0}{5}$) dello 0 , tornando così ai numeri naturali.

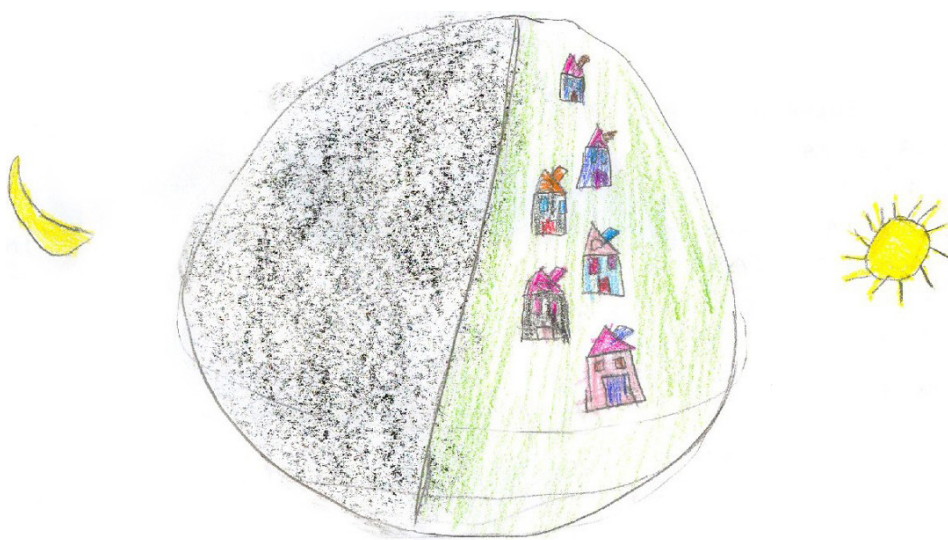
È allora ovvio che tutti i numeri naturali si possono pensare come frazioni un po' speciali.

Consideriamo la frazione $\frac{a}{b}$: il numero a è detto *numeratore*, mentre b è detto *denominatore*.

Si noti che se abbiamo due frazioni equivalenti, come $\frac{3}{4}$ e $\frac{9}{12}$, allora $3 \times 12 = 9 \times 4$. Questo perché due frazioni equivalenti individuano un'uguaglianza di rapporti: $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ che non è altro che una proporzione (argomento che gli allievi approfondiranno in seguito alla scuola media).

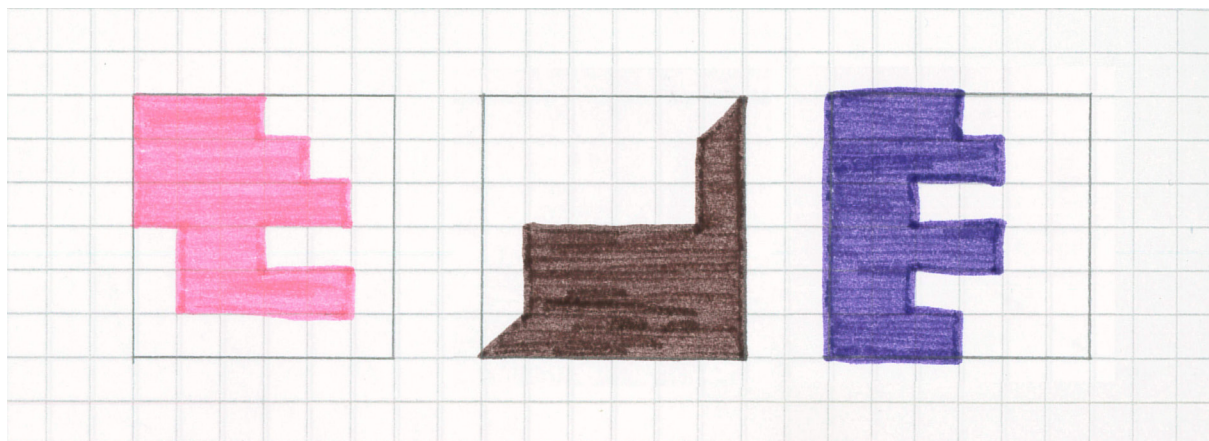
Per valutare se è più grande una frazione o un'altra, basta trovare due frazioni con lo stesso denominatore equivalenti alle due frazioni date e poi confrontare i numeratori. Per confrontare ad esempio $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ si può trovare il minimo comune multiplo dei due denominatori (12); oppure si può banalmente moltiplicare per 4 sia il numeratore sia il denominatore della prima frazione; e poi moltiplicare per 3 sia il numeratore sia il denominatore della seconda frazione; si otterranno così le due frazioni: $\frac{8}{12}$ e $\frac{9}{12}$ che sono equivalenti a quelle precedenti. Si vede subito allora che la seconda frazione è più grande della prima, perché 9 è maggiore di 8. Nel proporre questo argomento occorre essere consapevoli che vi sono diverse interpretazioni di tale concetto, legate ai diversi contesti d'uso di tali numeri. Alcune interpretazioni sono più specifiche per la scuola elementare, altre vengono affrontate formalmente nei livelli scolastici successivi, anche se possono essere intuite anche alle elementari, soprattutto se legate al vissuto che circonda gli allievi.

Aspetti didattici. Quando si parla di frazioni nella scuola elementare è importante partire dalle convinzioni che hanno gli allievi su questo argomento, valorizzando l'uso di tale tema nel contesto reale. L'interpretazione che emerge inizialmente è quasi esclusivamente basata sulla relazione parte-tutto, inerente oggetti principalmente continui (una torta, una pizza, una mela ecc.), ma anche discreti (un insieme di palline, bambini, figurine ecc.), con tante e imprevedibili interpretazioni diverse: tanti pezzi che si ottengono dalla divisione di un oggetto; ciascuna delle due parti non per forza congruenti che si ottengono tagliando la linea che separa due parti; l'azione di suddividere ecc. Per molti bambini l'aspetto rilevante del significato di metà è che "le parti" siano due, puntando così l'attenzione sull'aspetto numerico, senza considerare la congruenza delle parti: «È la parte della terra dove è giorno o quella dove è notte» (5 anni).



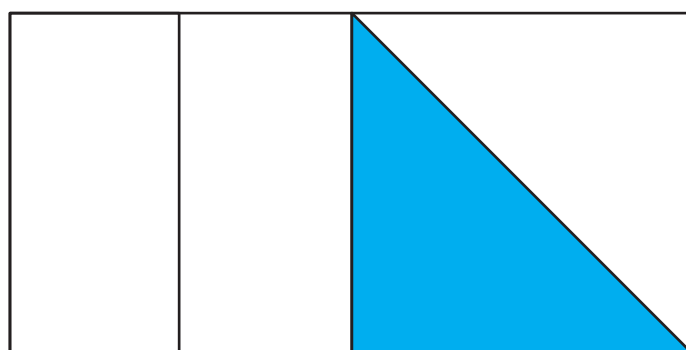
Rappresentazione spontanea del concetto di metà (5 anni).

I bambini dei primi anni di scuola elementare, dovendo colorare metà della superficie di un quadrato rappresentato su un foglio a quadretti, scelgono spesso di farlo in base al numero di quadretti, piuttosto che alla congruenza delle parti, se questa non è già stata imposta da una definizione vincolante.



Colorazione della metà della superficie di un quadrato.

Spesso infatti, si sceglie di introdurre questo argomento partendo dalla seguente definizione: “frazionare vuol dire dividere in parti uguali”, che risulta però essere vincolante rispetto ai molteplici significati del concetto e addirittura erronea, dato che la parola “uguale” (intesa come congruente) non consente di accettare che gli oggetti o figure siano divisi in parti di forma diversa, pur rispettando proprietà (come ad esempio l’equinumerosità, l’isoperimetria, l’equiestensione, l’equivolumetria ecc.). Ad esempio, nella figura seguente, la parte colorata rappresenta $\frac{1}{4}$ dell’area dell’intero rettangolo, anche se la figura non è stata divisa in parti “uguali”.

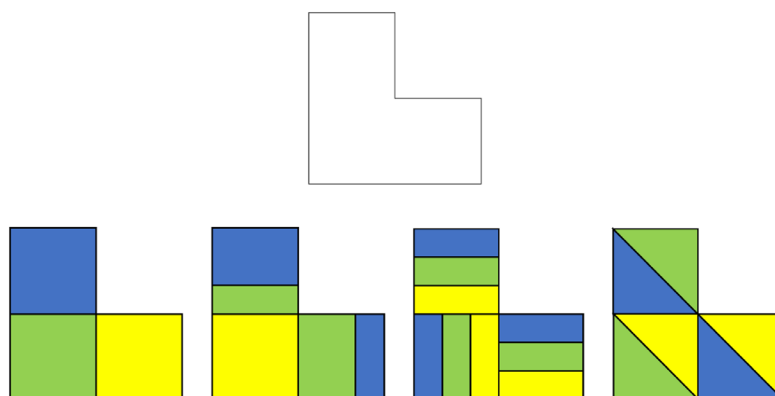


Colorazione di un quarto della superficie di un rettangolo.

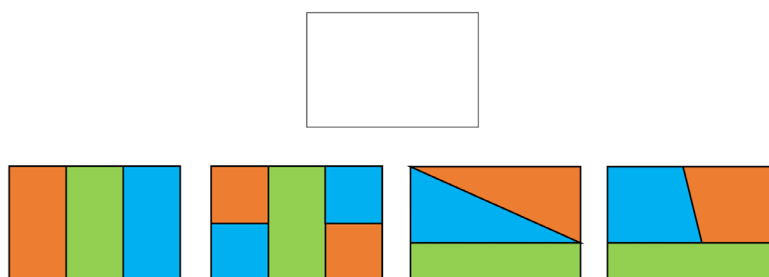
D'altronde ciò avviene anche nella vita reale: un qualsiasi pezzo di torta che decidiamo di mangiare rappresenta una frazione dell'intero, anche se in precedenza la torta non è stata tagliata in parti uguali!

Nella scuola elementare risulta quindi molto importante proporre agli allievi ricche e significative situazioni, in vari contesti discreti e continui, che contemplano la frazione parte-tutto applicata a diverse proprietà, e non esclusivamente alla congruenza delle parti.

Nel continuo, quando si passa dal reale a considerare frazioni di figure astratte, non vanno proposte solamente forme facili da frazionare, ma anche “stravaganti”, per non generare la misconcezione che solo nelle figure standard si possono trovare frazioni. La “stravaganza” può essere ricercata anche nelle forme delle parti che si individuano. Per motivare i bambini nella ricerca di partizioni, è possibile creare un concorso di classe per premiare la più originale suddivisione di un intero in parti che rispettano una certa proprietà.



Alcuni esempi di suddivisione in terzi di una figura non standard.



Alcuni esempi di suddivisione in terzi di una figura standard.

Può essere anche interessante far notare che l'unità continua si può sempre frazionare solo in teoria, perché dividere concretamente un foglio in $\frac{120}{379}$, non è una cosa semplice da ottenere nella pratica. Inoltre, quando si parla di frazioni nel discreto, vale la pena non limitarsi a chiedere di trovare suddivisioni possibili, ma può essere anche interessante ragionare su quelle impossibili. Per esempio, se si considera un insieme di 12 persone, si possono trattare non solo $\frac{1}{2}$ o $\frac{2}{3}$ (la totalità delle persone è multiplo di 2 e di 3), ma si può considerare anche $\frac{1}{5}$ di tale insieme per scoprire che è impossibile da trovare in concreto, essendo una situazione che dal punto di vista semantico non è attuabile.

Inoltre, quando si propone tale interpretazione della frazione (parte-tutto) è importante considerare non soltanto situazioni didattiche che prevedono attività dal tutto alla parte, ma anche dalla parte al tutto.

Sarebbe inoltre didatticamente importante far vivere agli allievi un'ampia gamma di esperienze legate ai diversi aspetti di questo ricco oggetto matematico, ma va considerato che le frazioni possono rappresentare un argomento molto ostico se affrontato con un approccio troppo formale e lontano dal vissuto degli allievi.

A volte la frazione $\frac{a}{b}$ rappresenta un quoziente, una divisione non necessariamente effettuata, ma solo indicata $a : b$; in questo caso l'interpretazione più intuitiva è la seguente: abbiamo a oggetti e dividiamo ciascuno in b parti. Ad esempio, se abbiamo un insieme discreto di 6 oggetti e ne dobbiamo prendere $\frac{3}{5}$, una tecnica può essere quella di dividere ogni elemento in 5 parti e poi prenderne 3 di tali quinti da ciascun oggetto, sempre che questi oggetti si possano dividere!

A volte la frazione è considerata come un operatore moltiplicativo, per esempio "Trovare $\frac{4}{5}$ dell'insieme di 20 persone", in questo caso si opera nel seguente modo: $(20 : 5) \times 4$ persone. Si agisce combinando la divisione e la moltiplicazione, dunque operando sui numeri puri invece che sulle raccolte e sugli oggetti.

Nelle ricette culinarie è possibile sperimentare praticamente la frazione come rapporto, mostrando così un legame tra grandezze, trovandosi a dover calcolare e preparare le quantità di ingredienti in relazione al numero delle persone da considerare.

Nella probabilità si tratta di esprimere, attraverso una frazione, il numero di casi favorevoli all'evento rispetto al numero dei casi possibili, ed è possibile creare situazioni di questo tipo sfruttando monete, dadi, biglie.

Un altro aspetto da contemplare è la frazione come misura: " $\frac{3}{4}$ di un litro, $\frac{1}{4}$ di litro, $\frac{1}{2}$ litro"; "La misura delle mie scarpe è 35 e $\frac{1}{2}$ "; "Ieri avevo 37 e $\frac{1}{2}$ di febbre". Queste affermazioni mettono in evidenza delle vere e proprie misure. Un ulteriore esempio in questo senso legato al lessico comune è l'affermazione: "Sono le quattro e un quarto", dove un quarto, rappresenta una frazione di un'ora, ma nell'uso comune vuol dire 15 minuti, ossia rappresenta un riferimento specifico: "La lancetta lunga sta sul 3 del nostro orologio, si trova in quella posizione".

Anche la percentuale non è altro che una frazione, con peculiarità specifiche ("sconto del 50%", "una pendenza del 10%").

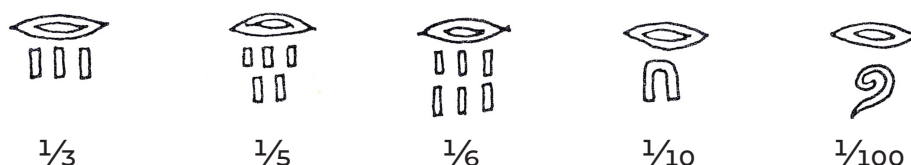
C'è un momento in cui la frazione viene posizionata su una retta orientata e acquista un nuovo significato, ma ciò viene trattato nella scuola media.

Nella scuola elementare si può però valutare se una frazione è minore di un'altra, cercando di lavorare didatticamente sulle possibili misconcezioni che si possono generare e aiutandosi eventualmente con diverse rappresentazioni. Per esempio, $\frac{2}{3}$ può essere ritenuta inizialmente minore di $\frac{4}{9}$, perché i bambini, confrontando inizialmente solo i numeratori, desumono che 2 è minore di 4 (e anche che 3 è minore di 9), così come avviene nei numeri naturali. Altri credono che ciò avvenga per l'analogia con i numeri decimali: 2,3 è minore di 4,9 perché 2 è minore di 4, allora sarà così anche tra $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{9}$. Su tali misconcezioni si può intervenire facendo vivere situazioni concrete dove vengono visualizzate le frazioni o dove è importante ricorrere a frazioni equivalenti; in questo caso, portando le frazioni ad avere lo stesso denominatore, si ottengono le frazioni $\frac{6}{9}$ e $\frac{4}{9}$ a confronto.

Gradualmente, grazie a tutte queste esperienze che si susseguono nei vari livelli scolastici, la frazione dovrà trasformarsi in numero razionale, assumendo un nuovo complesso significato.

Cenni storici. La storia dei numeri razionali è molto antica, soprattutto la rappresentazione in forma frazionaria di tali numeri. Le frazioni sono state infatti concepite nelle diverse epo-

che e nelle varie culture. L'idea di frazione appare esplicitamente su tavolette sumere del 4000 a. C., mentre una vera e propria teoria delle frazioni è presente nei papiri egizi. Questi ultimi dedicarono molta passione allo studio delle frazioni dove furono maestri insuperati fino al Medioevo. Ad esempio, nel famoso documento matematico dell'antico Egitto: il cosiddetto "papiro di Ahmes" o "di Rhind" del 1650 a. C., vi erano 84 problemi di matematica risolti e varie questioni aventi a che fare con le frazioni. Le scritture geroglifiche delle frazioni sono molteplici, proponiamo di seguito la più nota.



Scritture geroglifiche egizie delle frazioni.

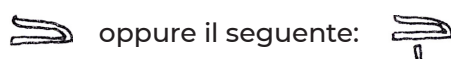
Il segno superiore che appare in tutti è il segno geroglifico "bocca" che si legge èr e che significa "parte"; esso funge dunque da numeratore unitario del tipo $\frac{1}{x}$. Il numerale che appare sotto la bocca è il denominatore.

In passato si pensava che gli Egizi usassero solo frazioni "unitarie" (che, infatti, spesso sono dette "frazioni egizie"), ma in realtà utilizzavano anche altre due frazioni, $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$, alle quali riservavano simboli particolari:



È vero, però, che gli Egizi non considerarono mai $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ come vere e proprie frazioni, ma piuttosto come simboli divini.

Anche la frazione $\frac{1}{2}$, per la sua peculiarità indiscutibile, aveva un segno geroglifico a parte:



che si chiamava *ghes* cioè "metà".

I papiri rivelano che gli Egizi furono veri e propri maestri a ridurre frazioni complesse in frazioni unitarie.

Per esempio, si trovano, tra mille altri esempi, le seguenti uguaglianze:

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}, \quad \frac{47}{60} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

(naturalmente i primi membri delle uguaglianze erano espressi o dal contesto o a parole).

Le frazioni egizie hanno anche un ruolo particolare nel mito e nelle leggende, come il famoso mito di Horus del 2000 a. C. circa. Tale mito ha moltissime varianti, una delle quali parla della dispersione per vendetta dei frammenti dell'occhio del Dio nel deserto. L'occhio venne diviso una prima volta a metà, poi ancora a metà e così di seguito per sei volte, fino ad avere un pezzo che rappresenta $\frac{1}{64}$ di tale organo.

La figura stilizzata di tale occhio, null'altro è se non una scrittura ieratica delle frazioni.

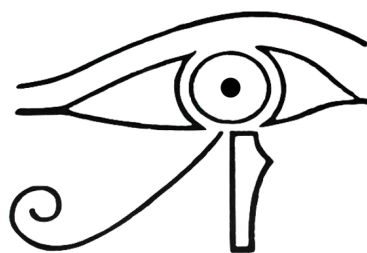


Figura stilizzata dell'occhio di Horus.

In effetti, gli Egizi del 2000 a. C. scrivevano le frazioni nel seguente modo:

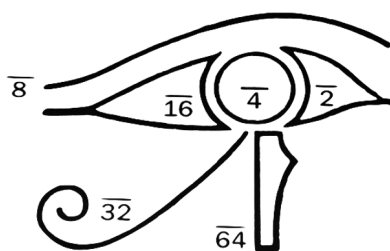


Tabella delle interpretazioni delle frazioni; la scrittura $\overline{8}$ sta per $1/8$.

A questo punto, la leggenda afferma che una splendida fanciulla, impietosa, e con grande atto d'amore, raccolse i vari pezzetti dell'occhio, da $1/2$ fino ad $1/64$, e li reinserì con cura e con affetto nella cavità oculare rimasta vuota di Horus; fatto ciò, Horus riprese la vista ed amò per sempre la fanciulla.

Ma la somma proposta dalla leggenda, $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + 1/64$, non ridà l'occhio per intero, cioè non ha come somma 1, dato che, comunque, manca $1/64$. Si ipotizza dunque che la storia, al di là del mito dell'amore compassionevole, volesse richiamare l'attenzione sul calcolo frazionario che gli Egizi consideravano sacro.

Anche nella faticosa aritmetica greca si concepirono le frazioni. Per rappresentarle si faceva ricorso all'apostrofo; per esempio, tenendo presente che β rappresentava il 2 e che γ rappresentava il 3, β' significa $1/2$ mentre γ' significa $1/3$. Questo fatto creava però ambiguità. Per esempio, la scrittura $\pi\epsilon'$ poteva voler dire tanto $80/5$ quanto $1/85$. A causa di questo fatto, molte furono le varianti per la scrittura delle frazioni, fino ad arrivare a Diofanto di Alessandria (III–IV sec.) che introdusse un simbolo analogo a quello moderno, anche se i posti di numeratore e denominatore erano tra loro scambiati. Ad esempio, la frazione $2/3$ veniva scritta $\frac{2}{3}$.

Il segno di frazione / detto "virgola" (bastoncino, da "virga", bastone) non sempre appariva; la frazione veniva infatti anche scritta con i due numeri sovrapposti senza nessun segno di separazione.

Per tutto il periodo greco le frazioni furono sempre usate, ma non furono mai considerate come oggetto specifico di studio, ma piuttosto come strumento di lavoro. A proposito di Diofanto, curioso è il racconto in frazioni della sua vita attribuito a Metrodoro (III sec.), presente nel testo *Antologia Palatina*: «Questa è la tomba che racchiude Diofanto, meraviglia da completare! Per mezzo dell'arte aritmetica insegna la misura della sua vita. Dio gli concesse la fanciullezza per un sesto della sua vita; dopo un altro dodicesimo la barba coprì le sue guance; dopo un settimo accese la fiaccola nuziale e dopo cinque anni ebbe un figlio.

Ahimé! Il misero fanciullo, pur tanto amato, avendo raggiunto appena la metà degli anni di vita del padre, morì. Quattro anni ancora, mitigando il proprio dolore colla scienza dei numeri, visse Diofanto, fino a raggiungere il termine della sua vita». Risolvendo l'equazione contenuta in questo racconto si trova che Diofanto è morto a 84 anni.

La storia delle frazioni ha riguardato anche altre culture come quella indiana, cinese, araba ed è arrivata fino ai giorni nostri con diverse evoluzioni. Tra i contributi indiani ricordiamo il testo scritto nel XII secolo dal matematico Bhaskaracarya, *Lilavati*, un nome femminile per il quale ci sono diverse interpretazioni. Il libro inizia così: Bella fanciulla dagli occhi lucenti... e continua rivolgendosi spesso a questa fanciulla. Tra gli indovinelli proposti sulle frazioni, citiamo il seguente: uno sciame di api vola sui fiori del giardino; di esse, $\frac{1}{5}$ si posa sui gelso-mini, $\frac{2}{3}$ sui lillà, $\frac{1}{15}$ sui gigli mentre due api s'aggirano qua e là senza prendere decisioni... Quante sono in tutte le api dello sciame?

È però nel *Liber Abaci* di Fibonacci del 1202 che le frazioni, per come le conosciamo noi oggi, appaiono per la prima volta: Fibonacci fornisce le regole delle operazioni sulle frazioni, trova massimi comuni denominatori tra frazioni, trasforma le frazioni in somme di frazioni a numeratore 1 ecc. La cosiddetta "riduzione delle frazioni ai minimi termini" si trova esplicitamente presentata con il nome di "schisare" dai matematici Luca Pacioli (1445-1515) e Nicolò Fontana da Brescia detto Tartaglia (1499-1557). Le parole *numeratore* e *denominatore* si affermarono invece nel XV secolo.

4.7.2 NUMERI DECIMALI

Un numero razionale espresso in notazione decimale, ossia secondo il nostro sistema numerico decimale, viene detto numero decimale (in lingua comune: "numero con la virgola"). La notazione decimale è quindi uno dei modi di rappresentare un numero razionale. Se si vuole passare da una rappresentazione espressa in frazione di un numero razionale alla notazione decimale, basta dividere il numeratore per il denominatore, ad esempio $\frac{2}{5}$ diventa $2 : 5 = 0,4$.

$\frac{2}{5}$ e 0,4 sono quindi due modi diversi di scrivere lo stesso numero razionale.

Nel numero decimale si individua una parte intera, prima della virgola, e una parte decimale, dopo la virgola.

Nel passare dalla forma frazionaria a quella decimale si può verificare solo uno dei seguenti tre casi:

- si ottiene un numero naturale, se il numeratore è multiplo del denominatore; ad esempio $\frac{12}{3}$ è uguale a 4 (i numeri naturali sono casi particolari di razionali);
- si ottiene un numero decimale con un numero finito di cifre dopo la virgola, ad esempio $\frac{2}{5}$ dà luogo alla scrittura 0,4;
- si ottiene un numero decimale periodico, cioè costituito da infinite cifre dopo la virgola in cui vi è un periodo (cioè alcune di queste cifre si ripetono all'infinito); ad esempio $\frac{41}{90}$ dà luogo alla scrittura 0,455555..., con il 5 che si ripete infinite volte. 0 è la parte intera, 4 si chiama antiperiodo e 5 si chiama periodo. Tale numero si scrive 0,4(5) oppure 0,4 $\bar{5}$.

È anche possibile fare il viceversa, ossia passare da un numero decimale a uno espresso in forma frazionaria. Ad esempio, 6,54 diventa la frazione $\frac{654}{100}$, che semplificata ai minimi termini è la frazione $\frac{327}{50}$. Il procedimento è più complesso quando il numero decimale di partenza è periodico.

Un numero decimale costituito da infinite cifre non periodiche dopo la virgola è detto irrazionale, argomento che non rientra nella trattazione della scuola elementare. Per un numero irrazionale non esiste un corrispettivo espresso in forma frazionaria.

I numeri decimali con un numero finito di cifre nella parte decimale hanno la caratteristica che gli zeri aggiunti nella parte più a destra, non cambiano la grandezza del numero: 1,30 è come dire 1,3. Questo risulta poco intuitivo per gli allievi che hanno acquisito l'esperienza che aggiungendo uno 0 "in fondo" ad un numero lo si moltiplica per 10.

Approfondimenti. La scrittura polinomiale di un numero è una rappresentazione basata su un'addizione dei prodotti di ogni cifra del numero moltiplicata per un'opportuna potenza di 10, così da rappresentarne il valore (si veda l'argomento [Sistema numerico decimale](#)). Questa rappresentazione mette dunque in risalto il valore di ogni cifra in base alla posizione che occupa.

Tale forma di rappresentazione dei numeri si presta, oltre che per i numeri naturali, anche per i numeri decimali. Ad esempio, il numero 341,235 in forma polinomiale diventa:

3	4	1	2	3	5
centinaia	decine	unità	decimi	centesimi	millesimi

moltiplicando la cifra dei millesimi per 0,001, la cifra dei centesimi per 0,01, quella dei decimi per 0,1, quella delle unità per 1 e via così avremo:

$$5 \times 0,001 + 3 \times 0,01 + 2 \times 0,1 + 1 \times 1 + 4 \times 10 + 3 \times 100$$

che corrisponde a:

$$5 \times 10^{-3} + 3 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-1} + 1 \times 10^0 + 4 \times 10^1 + 3 \times 10^2.$$

Effettuando i calcoli è possibile verificare che tale scrittura corrisponde proprio al numero 341,235.

Aspetti didattici. Abbiamo già anticipato come i bambini fin dall'ingresso della scuola elementare possiedono diverse interessanti convinzioni sul concetto di metà, espresse in diverse forme di rappresentazione figurali, e come da queste si possa partire per introdurre fin dal primo ciclo i più intuitivi numeri razionali. Va considerato che la rappresentazione in forma decimale di tale concetto (0,5) risulta poco evidente, sicuramente molto meno rispetto a quelle figurali e anche a quella frazionaria ($\frac{1}{2}$).

Allo stesso tempo i numeri decimali possono far parte dell'esperienza quotidiana dei bambini soprattutto in relazione all'ambito Grandezze e misure, ad esempio maneggiando le monete potrebbero già conoscere i centesimi o aver sentito utilizzare i numeri decimali per la loro altezza o per il contenuto di una bibita.

Queste esperienze spontanee possono essere valorizzate dal docente già nel primo ciclo, ma è nel secondo ciclo che i numeri decimali vengono presentati e approfonditi cogliendone le caratteristiche matematiche e gli usi anche nel contesto reale. In certi contesti è più diffusa, o risulta più conveniente, la rappresentazione di un numero razionale in notazione decimale, rispetto a quella frazionaria, in altri succede l'inverso. La quantità di acqua contenuta in una bottiglietta è di solito espressa in notazione decimale 0,33 cl; l'ordinamento su una retta numerica di alcuni numeri razionali, dal più piccolo al più grande, risulta più facilmente gestibile nella forma decimale; la probabilità di un evento è espressa in modo più intuitivo in forma frazionaria ecc.

Ordinare i numeri decimali dal più piccolo al più grande risulta abbastanza complesso per gli allievi; per farlo è importante riprendere le considerazioni proposte nel primo ciclo sul

valore posizionale delle cifre, allo scopo di far cogliere anche per la parte decimale di tali numeri il fondamentale ruolo del valore delle cifre legato alla loro posizione. In questo modo è possibile far comprendere agli allievi che ad esempio 1,2 è più grande di 1,15, pur essendo 2 più piccolo di 15 nell'insieme dei numeri naturali, focalizzando l'attenzione sul valore e la posizione di ciascuna cifra. Va prima di tutto confrontata la parte intera dei due numeri e, a parità di grandezza numerica, si passa a confrontare la parte decimale. Ciò che va inizialmente confrontato è il valore delle prime cifre dopo la virgola dei due numeri, in questo caso il 2 e l'1 e va valutato se ce n'è uno maggiore dell'altro o no, nel primo caso il numero con la cifra maggiore dopo la virgola sarà il più grande dei due. Se anche queste due cifre dopo la virgola risultano uguali, si passa al confronto delle seconde cifre dopo la virgola e così via.

Per cogliere in profondità il valore che assumono le cifre in base alla posizione nella parte decimale è importante confrontare numeri decimali che hanno dopo la virgola un numero diverso di cifre, come 2,7 e 2,619, così da favorire un confronto basato sulla posizione di ciascuna cifra, piuttosto che sulla quantità di cifre dei numeri considerati. Nel confronto della grandezza di numeri come 1,2 e 1,19, non risulta vincente la strategia di scrivere 1,2 nella forma equivalente 1,20, in quanto diventerebbe troppo immediato riconoscere che 20 è maggiore di 19, dato che ciò avviene anche nei numeri naturali, ma è importante far cogliere agli allievi che 1,2 è maggiore di 1,19, anche se 19 è maggiore di 2, per il valore delle prime cifre dopo la virgola. Occorre poi lavorare didatticamente sul fatto che non esiste il successivo di un numero razionale e ciò emerge in particolare quando si mostra il numero in notazione decimale. Il successivo di 0,7 non è 0,8 come inizialmente ci si illude, ma neppure 0,71, né 0,701 o 0,7001... per quanto ci si ostini a cercarlo, tale numero non esiste (si veda l'argomento [Ordinamento](#)).

Osserviamo inoltre che la scrittura polinomiale di un numero è unica se si considerano come coefficienti delle potenze di 10 le nostre 10 cifre, ma ce ne sono moltissime altre se si esce da questo vincolo (si veda l'argomento [Sistema numerico decimale](#)). Come per i numeri naturali, anche per i numeri decimali sarà opportuno considerare con gli allievi anche altre scomposizioni possibili del numero, quantificando in modo diverso migliaia, centinaia, decine, unità, decimi, centesimi, millesimi ecc. Questo per evitare che i bambini interiorizzino che, ad esempio, il numero 5,61 contiene solo 6 decimi, mentre in 5,61 ci sono 56 decimi.

Inoltre, risulta importante mostrare ai bambini esempi di numeri decimali le cui cifre decimali vadano oltre ai millesimi (con i decimi di millesimi, centesimi di millesimi e così via), così come si va oltre alle migliaia per la parte intera del numero decimale. Tutto ciò per evitare che si formi nei bambini la misconcezione che i numeri decimali si arrestino alla cifra dei millesimi.

Cenni storici. La forma decimale è molto antica. Già gli Assiri e i Babilonesi, pur non creando simboli appositi per le frazioni, considerarono l'analogo dei nostri numeri decimali, che nel loro caso erano numeri sessagesimali, dato che lavoravano in base 60.

La rappresentazione usata oggi dei numeri decimali è dovuta all'opera di Simone di Bruges, detto Stevin (1548-1620), che visse a cavallo tra il XVI e XVII secolo e faceva uso di tutt'altro simbolismo rispetto al nostro, non considerando la virgola. Ad esempio, 34,652 veniva scritto nel seguente modo: 34⑥①5②2③. Il simbolo della virgola “,” per separare la parte intera da quella decimale è stato proposto da John Wallis (1616-1703), il maestro di Isaac Newton, e fu definitivamente generalizzato in Italia e in Francia alla fine del XVIII secolo, quando venne introdotto il sistema metrico decimale. La derivazione etimologica del termine decimale è invece latina e deriva da “decimalis”, cioè “ripartito” (o “ordinato”) “a dieci a dieci”.

4.8 OPERAZIONI

Un'operazione è una funzione che a due elementi dello stesso insieme, associa un elemento sempre nello stesso insieme. Un'operazione può quindi essere pensata come una "macchina" che funziona così: ci si mettono dentro due numeri e lei restituisce in uscita un numero, ottenuto secondo una regola definita in precedenza.

Esistono infinite operazioni, basta avere un po' di fantasia, come per i seguenti esempi:

- La macchina prende i due numeri e li restituisce scritti uno di seguito all'altro:
prende 5 e 17 e restituisce 517.
- La macchina prende i due numeri e restituisce la somma del doppio del primo con il secondo:
prende 5 e 17 e restituisce 27.
- La macchina prende due numeri, dimentica il primo e restituisce il doppio del secondo:
prende 5 e 17 e restituisce 34.
- La macchina prende due numeri e restituisce sempre 0:
prende 5 e 17 e restituisce 0.

Esistono tuttavia alcune operazioni più interessanti di altre, tra le quali le più conosciute sono l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione e la divisione. Queste quattro operazioni sono dette operazioni fondamentali dell'aritmetica, in quanto risultano utili nella vita quotidiana e rappresentano competenze fondamentali per la formazione del futuro cittadino.

Un'operazione si dice *interna* a un insieme se, presi due qualsiasi elementi a, b dell'insieme, l'operazione restituisce ancora un elemento dell'insieme. In altri termini, un'operazione è interna a un insieme se e solo se si può eseguire con tutti e soli gli elementi di quell'insieme, senza usarne altri.

L'addizione e la moltiplicazione sono interne all'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$; l'addizione, la moltiplicazione e la sottrazione sono interne all'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$; tutte e quattro le operazioni fondamentali sono interne all'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$.

Le operazioni godono di diverse proprietà che risultano utili per svolgere algoritmi o effettuare calcoli.

Aspetti didattici. Le prime idee intuitive sulle quattro operazioni fondamentali vengono apprese fin dalla scuola dell'infanzia, grazie a esperienze legate al vissuto quotidiano.

È l'addizione l'operazione più intuitiva, ma diversi bambini possiedono rappresentazioni ingenuie anche della sottrazione, legate all'idea di completare una raccolta o di togliere degli oggetti da una raccolta, della moltiplicazione, come addizione ripetuta, o della divisione, come suddivisione o ripartizione di oggetti.

I primi apprendimenti relativi a questi concetti si realizzano fin da molto piccoli, quando la situazione viene vissuta personalmente e verbalizzata in contesti quotidiani.

Nel gestire le operazioni nel primo ciclo, occorre considerare che il ricorso alle dieci dita delle mani ha svolto e svolge tuttora per l'apprendimento dei numeri e delle operazioni un ruolo determinante: le mani possono essere considerate come la più semplice e disponibile macchina calcolatrice impiegata da tutte le popolazioni nel corso delle ere. Gradualmente l'allievo si distanzia dall'uso delle dita delle mani, grazie all'accrescere delle sue competenze e alla maggiore complessità delle operazioni considerate.

Le variegate intuizioni degli allievi relative alle operazioni vanno rispettate e considerate in classe, accettando le diverse rappresentazioni spontanee; una rappresentazione intuitiva

del concetto, dell'idea, della relazione, dell'operazione considerata, è in effetti quella più accessibile e immediata per il bambino e per questo è quella sulla quale l'allievo costruisce il proprio apprendimento. Va quindi accettata e gradualmente ampliata con altre possibili interpretazioni del concetto ritenute più efficaci.

Anche quando si chiede di rappresentare le proprie intuizioni su un foglio, ad esempio per risolvere un problema, occorre assecondare inizialmente le diverse rappresentazioni degli allievi (pittorica, iconica, linguistica e simbolica), senza imporre un formalismo eccessivo fino a quando gli allievi non sono in grado di comprenderlo. La scelta del tipo di rappresentazione da utilizzare per mostrare il processo risolutivo può variare da allievo ad allievo in base al proprio stile, alle proprie competenze e al contesto, favorendo una differenziazione delle scelte. Ciò vale indipendentemente dal sapere in gioco e dalla classe; per ogni nuovo concetto è bene partire dalla ricchezza di rappresentazioni spontanee, metterle a confronto valutandone i punti di forza e di debolezza a seconda del contesto e poi farle evolvere gradualmente, quando gli allievi hanno le competenze per gestirle, fino ad arrivare a proporre le rappresentazioni simboliche convenzionali.

La storia del simbolismo mette in evidenza quanto sia stato lungo e difficoltoso il percorso per la conquista di un formalismo astratto e condiviso, per questo non va subito imposto agli allievi in classe.

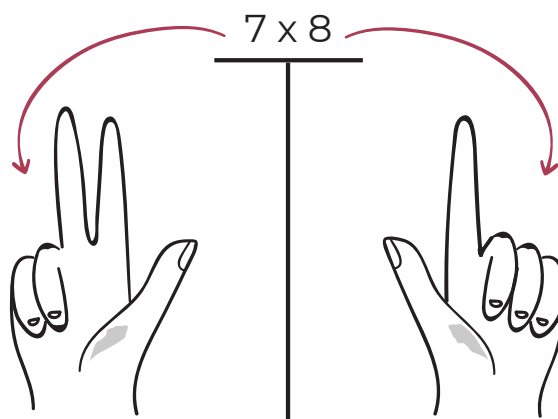
Soprattutto in un secondo ciclo, occorre considerare che ogni operazione aritmetica possiede oltre a uno o più significati intuitivi, anche un suo significato formale e che non sempre questi significati coincidono tra loro. Per acquisire il significato formale di ogni operazione occorre far vivere agli allievi diverse esperienze, legate alle molteplici interpretazioni delle operazioni in contesti problematici. Va anche considerato che riuscire ad individuare quali operazioni consentono di risolvere un problema proposto può essere più o meno complesso a seconda della situazione fornita. Un bravo risolutore di problemi mette in gioco diverse competenze che non riguardano solo la matematica, ma anche la lingua e più in generale diverse competenze trasversali come quelle metacognitive.

I significati delle operazioni poi cambiano e diventano sempre più slegati dalla concezione più intuitiva e dal contesto reale man mano che l'insieme dei naturali $\mathbb{N}$ viene ampliato negli altri insiemi numerici, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e più in generale $\mathbb{R}$.

Nell'introduzione delle operazioni va inoltre prestata particolare attenzione all'uso dell'uguale come relazione, che indica che la scrittura di sinistra esprime la stessa quantità di quella di destra. L'uguale non si dovrebbe cioè interpretare come una procedura per arrivare ad un risultato, ma come un segno che si può leggere nei due versi, essendo una relazione tra quantità. Ciò potrebbe evitare agli alunni molti errori legati all'interpretazione di tale concetto nei livelli scolastici successivi.

Cenni storici. Oltre a servire per i conteggi, le mani e le diverse parti del corpo sono state utilizzate per lungo tempo dall'uomo per effettuare operazioni. Un'antichissima tradizione orientale, ancora assai diffusa all'inizio del secolo scorso in Algeria, Arabia, Siria, Iraq, Iran, India, Mongolia e Cina, veniva impiegata dai mercanti e dai loro clienti per le contrattazioni, e consisteva nel comunicarsi reciprocamente la richiesta e l'offerta senza pronunciare alcuna parola, ma toccandosi le dita delle mani destre che nascondevano sotto a un panno; tramite i gesti aumentavano o calavano le reciproche offerte e ciò veniva celato agli altri potenziali acquirenti, così che nessuno dei presenti potesse sapere il prezzo pattuito.

Oltre a queste operazioni, tramite le mani era possibile eseguire anche moltiplicazioni di diverse difficoltà, che è possibile proporre nel secondo ciclo. Questa antichissima tradizione è ancora oggi rintracciabile in India, Iraq, Siria, Serbia, Nord Africa... Per esempio, per moltiplicare rapidamente due numeri naturali compresi tra 5 e 10, basta seguire il seguente procedimento. Consideriamo ad esempio la moltiplicazione 7×8 .



Moltiplicazione con le mani di 7×8 .

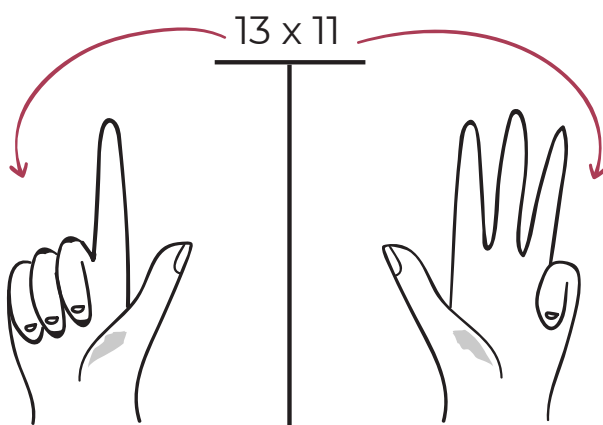
Si piegano su una mano tante dita quante sono le unità supplementari in 7 rispetto a 5, mantenendo le altre tese: $7 - 5 = 2$ dita di una mano.

Si piegano sull'altra mano tante dita quante sono le unità supplementari in 8 rispetto a 5, mantenendo tese le dita restanti: $8 - 5 = 3$ dita dell'altra mano.

A questo punto si ottiene il risultato del prodotto cercato moltiplicando prima per dieci il numero $2 + 3 = 5$ delle dita piegate sulle due mani (dunque 5×10) e quindi aggiungendo a questo risultato parziale il prodotto delle dita distese delle due mani (dunque $2 \times 3 = 6$), ottenendo in definitiva:

$$7 \times 8 = 5 \times 10 + 2 \times 3 = 56.$$

Analizziamo ora la moltiplicazione con le dita di due numeri naturali compresi tra 10 e 15, come ad esempio 13×11 .



Moltiplicazione con le mani di 13×11 .

Si piegano su una mano tante dita quante sono le unità supplementari in 13 rispetto a 10, mantenendo le altre tese, cioè $13 - 10 = 3$ dita di una mano.

Si piegano sull'altra mano tante dita quante sono le unità supplementari in 11 rispetto a 10, mantenendo tese le dita restanti, cioè $11 - 10 = 1$, cioè un dito dell'altra mano.

A questo punto, si ottiene il risultato del prodotto cercato moltiplicando prima per 10 il numero totale delle dita piegate sulle due mani, poi aggiungendo a questo risultato parziale il prodotto delle dita piegate delle due mani $3 \times 1 = 3$ e infine sommando tale risultato parziale a 10×10 ottenendo in definitiva:

$$13 \times 11 = (3 + 1) \times 10 + 3 \times 1 + 10 \times 10 = 40 + 3 + 100 = 143.$$

Con altre tecniche affini, si riuscivano a moltiplicare tutti i numeri compresi tra 15 e 20, tra 20 e 25, e così via.

Anche far scorrere una mano su varie parti del corpo poteva dare origine in alcuni paesi, tra i quali l'Ecuador, a una specie di danza, grazie alla quale era possibile fino a poco tempo fa compiere vere e proprie operazioni aritmetiche, anche assai complesse. In Europa, questo genere di calcolo con le parti del corpo, in particolare con le dita, si è perso definitivamente nel Rinascimento, con l'introduzione massiccia degli algoritmi posizionali e soprattutto di carta a buon mercato e strumenti per scrivere abbastanza agevoli. La mano, infatti, primo supporto concreto del calcolo, costituisce solo una fuggevole modalità di registrazione del concetto numerico, che non soddisfa la necessità di conservare in maniera duratura il ricordo dei passaggi di un computo. Tracce di operazioni aritmetiche scritte sono però assai più antiche; nel 4000 a. C. ne sono state trovate in tavole sumere di argilla, mentre operazioni già molto elaborate si trovano in papiri egiziani del 1800 a. C. dove si faceva uso anche delle proprietà delle operazioni elementari. A quei tempi non c'erano simboli per le operazioni e tutto si scriveva a parole.

Ricordiamo che i segni usati oggi per le operazioni sono molto recenti; sono infatti nati tra il XVI e il XVII secolo, in Francia; mentre il segno di uguale fu inventato nel XVIII secolo in Inghilterra.

Nel mondo egizio le addizioni venivano eseguite in maniera del tutto simile alla nostra attuale: la sottrazione veniva eseguita per completamento, cercando la cifra mancante per giungere dal sottraendo al minuendo, mentre la moltiplicazione era basata sul metodo detto del "raddoppio". Eseguiamo a titolo di esempio la moltiplicazione 12×17 .

Questo algoritmo era composto di due colonne; nel primo termine della seconda colonna veniva scritto il numero più grande tra i due fattori (17), nella colonna di sinistra si scriveva 1. In ogni riga successiva, all'interno delle rispettive colonne, si scrive il numero doppio rispetto al numero contenuto nella riga precedente, fino a quando gli elementi della colonna di sinistra, che rappresentano le potenze di 2, risultano non maggiori del fattore più piccolo (12).

1	17
2	34
4	68
8	136

A questo punto si evidenziano i numeri della prima colonna la cui somma corrisponde all'altro fattore, cioè 12: nel nostro caso, 8 e 4. Si sommano i numeri della seconda colonna che si trovano a destra dei numeri considerati: $68 + 136$. Si trova 204. Ebbene, proprio 204 è il prodotto cercato.

Si noti che, per eseguire la moltiplicazione, non serve conoscere quelle che oggi si chiamano le tabelline o caselline, basta saper raddoppiare e addizionare.

Vediamo ora un esempio di divisione del mondo egizio, $228 : 12$.

•	1	12
•	2	24
	4	48
	8	96
•	16	192

Si mettono in colonna 1 e il divisore 12; e poi si raddoppia sempre fino a superare la metà del dividendo nella seconda colonna. Siccome $12 + 24 + 192$ dà proprio 228, allora $1 + 2 + 16$ (cioè 19) è il quoziente cercato. E infatti $19 \times 12 = (16 + 2 + 1) \times 12 = 192 + 24 + 12 = 228$. Qualche complicazione in più si ha nel caso in cui il dividendo non sia multiplo del divisore.

Sono numerosi gli algoritmi delle operazioni utilizzati dai diversi popoli e nelle diverse epoche, alcuni dei quali molto interessanti anche dal punto di vista didattico, in particolare quelli medievali dei quali mostreremo alcuni esempi nel contenuto [Strategie di calcolo](#).

4.8.1 ADDIZIONE

Nell'insieme dei numeri naturali, l'addizione è l'operazione che preso il numero di elementi di due insiemi disgiunti restituisce il numero degli elementi dell'unione dei due insiemi. L'addizione si indica con il segno $+$.

I numeri degli elementi delle due raccolte vengono detti *addendi*, il numero dell'unione degli elementi dei due insiemi, ossia il risultato, è chiamato *somma*.

L'addizione è un'operazione interna all'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$, dato che è possibile in esso eseguire tutte le addizioni e gode di alcune proprietà:

- *commutativa*, ovvero cambiando l'ordine degli addendi la somma non cambia: $a + b = b + a$, ad esempio $4 + 3 = 3 + 4$, la somma è sempre 7;
- *associativa*, ovvero quando si sommano tre o più addendi, la somma è la stessa indipendentemente dall'ordine in cui vengono effettuate le addizioni: $(a + b) + c = a + (b + c)$, ad esempio $(3 + 5) + 2 = 3 + (5 + 2)$, la somma è sempre 10, dato che $8 + 2 = 3 + 7$; ossia possiamo sommarli a due a due come vogliamo e il risultato non cambia;
- zero è l'*elemento neutro* dell'addizione, ovvero sommare 0 a un numero lascia quel numero invariato: $a + 0 = 0 + a = a$, ad esempio $5 + 0 = 0 + 5$, fa sempre 5.

Se mettiamo insieme le proprietà associative e commutativa, abbiamo un bel risultato: possiamo addizionare come vogliamo, mescolando i numeri tra di loro e senza usare alcuna parentesi.

L'addizione è un'operazione che può essere applicata anche negli altri insiemi numerici ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$).

Aspetti didattici. L'addizione è l'operazione più intuitiva per gli allievi: essendo legata all'idea di mettere insieme gli elementi e all'azione del conteggio, iniziano ad approcciarla in modo naturale fin da molto piccoli.

L'addizione possiede diversi "sensi intuitivi"

- unire gli oggetti di due insiemi diversi;
- avanzare, andare avanti, trascorrere;
- aggiungere qualcosa a qualcos'altro...

Nella scuola elementare la complessità di tale operazione può aumentare in base a diversi fattori: i tipi di numeri considerati (naturali o decimali), la loro grandezza, la loro difficoltà di scrittura, il numero di addendi, il tipo di calcolo coinvolto, il tipo di contesto a cui si riferisce il calcolo (come ad esempio un problema) ecc.

Nel risolvere problemi va considerato che vi sono diverse interpretazioni dell'addizione, anche se si indicano tutte nello stesso modo (+); queste vanno proposte dalla prima alla quinta elementare, facendo notare agli allievi che non è il tipo di operazione risolutiva che rende un problema facile o difficile, ma molto spesso è il testo stesso (contesto, linguaggio, dizionario, enciclopedia ecc.) a creare difficoltà, anche perché a volte il significato dell'operazione sotteso nel testo non è tra quelli più intuitivi.

Si possono mostrare esempi di problemi che si risolvono tutti con la stessa addizione, ad esempio $5 + 3$, ma che risultano più o meno difficili da essere interpretati e risolti, essendo più o meno legati al significato intuitivo di addizione.

1. Intorno ad un tavolo ci sono 5 bambini e 3 bambine. Quanti sono in tutto?
2. Siamo sulla retta dei numeri naturali e ci troviamo sul 5, dopo aver fatto 3 passi a destra su quale numero ci troviamo?



3. Leonardo ha speso 3 franchi. Egli ha ora in tasca 5 franchi. Quanti franchi aveva prima?
4. Francesco ha giocato due partite. Nella prima ha perso 5 punti, ma alla fine della seconda partita si è trovato in vantaggio di 3 punti. Che cosa è successo nella seconda partita?

Tutti questi problemi si risolvono con la stessa operazione $5 + 3$, ma hanno percentuali di successo incredibilmente diverse.

È importante rilevare che a volte, in buona fede, sono state fatte delle scelte didattiche con l'illusione di far acquisire il sapere agli allievi in modo più intuitivo e immediato, ma possono essere risultate forvianti rispetto all'oggetto matematico in gioco. Ne è un esempio il tema della scomposizione per quanto concerne l'addizione, argomento che è presente solo nelle aule scolastiche, ma che non rientra in modo specifico nella matematica, dato che anche quando si tratta questo tema in realtà si parla sempre di addizione. Dire infatti che $7 + 3 = 10$ o che $10 = 7 + 3$ è la stessa cosa; si tratta della stessa operazione, l'addizione, che può essere letta nei due sensi indipendentemente da come è scritta. Se vogliamo far percepire agli allievi il significato dell'uguale, nel senso di una relazione tra quantità, è importante far cogliere che stiamo facendo la stessa operazione quando da più addendi otteniamo una somma, o ad una somma associamo vari addendi che la possono generare. In tal senso, fornire agli allievi due distinti nomi: addizione e scomposizione, se l'uguale viene letto in un verso oppure nell'altro, invece dell'unico nome addizione, può portare alla convinzione che l'uguale non sia una relazione, ma solo una procedura; idea che ha erronee conseguenze nei livelli scolastici successivi quando si affronteranno espressioni o equazioni.

Ovviamente rimane un'attività importante chiedere agli allievi di individuare due o più ad-

dendi che sommati danno un determinato numero, come nel caso dello strategico 10; tali attività aiutano infatti l'apprendimento numerico e il calcolo mentale.

Un caso analogo di erronea trasposizione didattica è l'introduzione nelle aule scolastiche della proprietà dissociativa, proprietà che in matematica non esiste, dato che si tratta sempre della proprietà associativa $(a + b) + c = a + (b + c)$, a cui vengono dati erroneamente due nomi diversi a seconda che la lettura venga fatta da una parte o dall'altra dell'uguale. Tale scelta risulta ancora una volta impropria, andando contro al concetto stesso di proprietà associativa e più in generale di uguale considerato in senso relazionale.

4.8.2 SOTTRAZIONE

La sottrazione è l'operazione inversa dell'addizione: presi due numeri, ne fornisce un altro, se esiste, che aggiunto al secondo dà come somma il primo. Detto in altro modo, il risultato di una sottrazione tra due numeri è quel che manca al secondo numero per essere uguale al primo.

In questo modo la sottrazione, che si indica con il segno $-$, viene definita in termini di addizione, mostrando così come queste due operazioni siano collegate l'una all'altra. Proviamo con un esempio: $8 - 3$ dà come risultato quel che manca al 3 per essere grande come 8, cioè 5. Dunque scriveremo: $8 - 3 = 5$.

Il primo termine viene detto *minuendo*, il secondo *sottraendo*, e il risultato, se esiste, è detto *differenza*.

È possibile fare $3 - 8$ nell'insieme dei numeri naturali? È chiaro che no: non si può “togliere” 8 da 3; sulla retta dei numeri naturali, non si può partire da 3 e andare indietro di 8. Dunque, nella sottrazione bisogna stare bene attenti; non sempre si può fare una qualsiasi sottrazione. Per riuscirci in $\mathbb{N}$, il primo termine deve essere maggiore o uguale al secondo, altrimenti occorre passare all'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$, che contempla anche i numeri negativi.

Occhio allo zero! Lo zero nella sottrazione non rappresenta l'elemento neutro, perché $5 - 0 = 5$, ma $0 - 5$ non si può fare nell'insieme dei numeri naturali; possiamo riuscire a fare solo $0 - 0$.

Per la sottrazione non vale né la proprietà commutativa né quella associativa.

Per la sottrazione vale la seguente proprietà:

- *invariantiva*: se si aggiunge o si sottrae uno stesso termine sia al minuendo sia al sottraendo, la differenza non cambia. Ad esempio, se consideriamo $18 - 14$, e sottraiamo 3 a entrambi i termini otteniamo $15 - 11$, la differenza delle due sottrazioni è la stessa ed è uguale a 4.

Aspetti didattici. Nel primo ciclo la sottrazione è molto legata al concetto di togliere una quantità di oggetti da una raccolta, o come completamento, ossia come quel numero che manca per arrivare ad un altro numero. Quest'ultima interpretazione viene spesso usata anche nella vita reale. Si pensi al cassiere che in un negozio sovente fornisce il resto, aggiungendo al costo di ciò che si è comprato i franchi che occorrono per arrivare alla banconota fornita dall'acquirente.

Anche la sottrazione possiede dunque diversi “sensi intuitivi”:

- togliere da una raccolta;
- tornare indietro, indietro-reggiare;
- trovare quanto manca a...

È quindi importante anche in questo caso fornire agli allievi diversi esempi di problemi e situazioni che portano a interpretazioni diverse, pur risolvendosi tutte con la stessa sottrazione, ad esempio $8 - 3 = 5$.

1. Sergio ha 8 figurine, ma ne regala 3 al suo fratellino Paolo. Quante gliene restano?
2. Nella retta dei numeri naturali siamo sull'8 e ci spostiamo a sinistra di tre posti. In quale numero ci troveremo?



3. Andrea ha 3 figurine, ma per poter entrare nel “club dei collezionisti” servono 8 figurine. Quante gliene mancano?

Fin dai primi anni di scuola elementare è importante spiegare agli allievi che la sottrazione $3 - 5$ non si può fare nell'insieme dei numeri naturali, ma verranno introdotti altri numeri che permetteranno di eseguire anche queste sottrazioni. Dire infatti agli allievi che operazioni del tipo $3 - 5$ non si potranno mai, ma proprio mai, fare, non li aiuta ad avere quell'elasticità necessaria per ampliare l'insieme quando avranno le competenze per poterlo gestire, arrivando a dire che $3 - 5 = -2$. Va anche ribadito che approcciarsi ai numeri negativi risulta abbastanza intuitivo per gli allievi di scuola elementare (li vedono nella loro vita extrascolastica quando hanno a che fare con la temperatura, l'ascensore ecc.) ed è dunque possibile mostrare in un secondo ciclo, ad esempio tramite saltelli sulla retta dei numeri, che è possibile eseguire tutte le sottrazioni coinvolgendo anche i numeri negativi.

Va inoltre mostrato agli allievi tramite esempi, che ciò che vale per l'addizione nell'insieme dei numeri naturali, non è detto che valga per la sottrazione: l'elemento neutro non esiste, le proprietà commutativa e associativa non valgono e questo comporta che nella sottrazione l'ordine degli elementi risulta fondamentale.

4.8.3 MOLTIPLICAZIONE

La moltiplicazione nell'insieme dei numeri naturali funziona così: prende due numeri naturali e dà in uscita la somma di un'addizione ripetuta di uno dei due numeri sommato a sé stesso tante volte quante ne esprime l'altro.

Se consideriamo per esempio 5 e 3, la moltiplicazione ci dà in uscita un'addizione ripetuta del primo numero sommato a sé stesso tante volte quante ne esprime il secondo numero ($5 + 5 + 5$), che equivale a dire che ci dà in uscita un'addizione ripetuta del secondo numero sommato a sé stesso tante volte, quante ne esprime il primo numero ($3 + 3 + 3 + 3 + 3$); questa interscambiabilità nel concepire i due termini della moltiplicazione avviene perché valgono diverse proprietà dell'addizione, che ricadono nella moltiplicazione.

I termini della moltiplicazione vengono chiamati genericamente *fattori*, mentre il risultato viene detto *prodotto*. Va osservato che a volte il primo termine della moltiplicazione è detto moltiplicando e il secondo moltiplicatore, ma questo potrebbe generare negli allievi la concezione erronea che vi sia un ordine preferenziale per i fattori di una moltiplicazione; cosa che non è, data la proprietà commutativa. Suggeriamo dunque di chiamarli indistintamente fattori, come per l'addizione i termini si chiamano indistintamente addendi.

La moltiplicazione in $\mathbb{N}$ è quindi un modo più rapido di concepire e rappresentare l'addi-

zione di numeri uguali; tale operazione è interna all'insieme dei numeri naturali, ossia è possibile effettuare tutte le moltiplicazioni.

La moltiplicazione si può scrivere in due modi: con una crocetta ruotata, 5×3 (si legge: "5 per 3"), oppure con un puntino sospeso a mezz'aria, $5 \cdot 3$ (si legge sempre nello stesso modo). Nella scuola elementare risulta più semplice da gestire il primo simbolo.

La moltiplicazione gode di alcune proprietà:

- *commutativa*, ovvero cambiando l'ordine dei fattori il risultato non cambia: $a \times b = b \times a$, ad esempio $4 \times 3 = 3 \times 4$, il risultato è sempre 12;
- *associativa*, ovvero quando si moltiplicano tre o più fattori, il risultato è lo stesso indipendentemente dall'ordine in cui vengono effettuate le moltiplicazioni: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$, ad esempio $(3 \times 5) \times 2 = 3 \times (5 \times 2)$, il risultato è sempre 30;
- *distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione*, questa proprietà non riguarda solo un'operazione alla volta, ma le operazioni a due a due, in questo caso la moltiplicazione e l'addizione. È possibile distribuire la moltiplicazione ai vari addendi di un'addizione, ad esempio: $4 \times (2 + 3) = (4 \times 2) + (4 \times 3)$, fa sempre 20. Nel membro sinistro dell'espressione precedente, 4 moltiplica la somma di 2 e 3; nel membro destro, 4 moltiplica il 2 e il 3 separatamente e i risultati sono successivamente sommati tra loro. Non vale invece la proprietà distributiva dell'addizione rispetto alla moltiplicazione, cioè $4 + (2 \times 3)$ non dà lo stesso risultato di $(4 + 2) \times (4 + 3)$;
- 1 è l'*elemento neutro* della moltiplicazione, ovvero moltiplicando 1 ad un numero il prodotto è il numero stesso: $a \times 1 = 1 \times a = a$, ad esempio $5 \times 1 = 1 \times 5$, fa sempre 5.
- 0 è l'*elemento assorbente* della moltiplicazione, ovvero se almeno uno dei due numeri che appare nella moltiplicazione è 0, allora il risultato è certamente 0, ad esempio $a \times 0 = 0 \times a = 0 \times 0 = 0$, ad esempio $5 \times 0 = 0$, $0 \times 5 = 0$, $0 \times 0 = 0$; inoltre se il risultato di una moltiplicazione è zero, allora è certo che almeno uno dei due numeri moltiplicati è 0.

Si vede una certa analogia tra le proprietà dell'addizione e le proprietà della moltiplicazione, essendo quest'ultima un'addizione ripetuta.

Nell'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ la moltiplicazione assume nuovi significati e applicazioni; ad esempio, non è trasferibile il significato intuitivo appreso in $\mathbb{N}$ di ripetere un numero per tot volte, perché perderebbe di senso. Che senso avrebbe in effetti ripetere un numero ad esempio per 0,2 volte?

Va anche considerato che in $\mathbb{Q}$ esiste l'inverso di qualsiasi numero n (ad eccezione dello zero) rispetto alla moltiplicazione, che è $\frac{1}{n}$, quindi l'inverso di 3 è $\frac{1}{3}$ dato che $3 \times \frac{1}{3} = 1$.

Aspetti didattici. La moltiplicazione, concepita come addizione ripetuta, può essere intuita da alcuni allievi fin dall'ingresso della scuola elementare e poi approfondita negli anni successivi.

Va considerato che anche per questa operazione vi sono diverse interpretazioni, più o meno intuitive, che variano a seconda della situazione.

Ad esempio, i seguenti tre esempi mostrano significati intuitivi diversi della stessa moltiplicazione 4×5 .

1. Ci sono 4 file, ciascuna delle quali contiene 5 macchinine. Quante macchinine ci sono in tutto?

Questa situazione si può scrivere così: $4 \times 5 = 20$, che vuol dire 4 file da 5 macchinine l'una. Ma nulla vieta di pensare a: $5 \times 4 = 20$, interpretando 5 macchinine per ciascuna delle 4 file.

C'è chi sostiene che una delle due formulazioni sia più intuitiva dell'altra, ma a nostro avviso sono entrambe intuitive e lecite.

2. Anna ha 4 gonne e 5 magliette e vuol vestirsi ogni giorno in modo diverso, combinando sempre gonne con magliette diverse. Per quanti giorni le riesce questo giochetto di accostamenti diversi?

Per ognuna delle 4 gonne, può vestirsi 5 giorni in modo diverso, indossando una maglietta diversa; dunque, anche in questo caso, la situazione si può rappresentare con la scrittura: $5 \times 4 = 20$, ma il significato intuitivo è assai diverso da quello precedente.

3. In un grande parco divertimenti, ogni giro di percorso con le macchinine costa 4 franchi. Se Francesco fa 5 giri, quanti franchi spende?

Ancora una volta questa situazione si può rappresentare così: $5 \times 4 = 20$.

La moltiplicazione nell'insieme dei numeri naturali è molto legata all'idea di accrescimento, dato che il prodotto in $\mathbb{N}$ è sempre più grande dei fattori, a parte il caso in cui siano coinvolti numeri assai speciali come 0 e 1.

Questa idea intuitiva viene rafforzata dall'esperienza quotidiana, dall'uso del termine moltiplicazione nel senso comune e dalle raffigurazioni schematiche (cosiddette "per schiementamento") mostrate in classe. Ma ciò può generare nella mente dell'allievo quel modello "parassita" che si può enunciare così: "la moltiplicazione accresce sempre" e che avrà conseguenze didattiche negative negli anni seguenti.

Il tentativo di continuare ad applicare tale modello quando la moltiplicazione viene eseguita nell'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali si rivela fallimentare, quando si dovrà effettuare $4 \times 0,5$, che non dà come risultato 8, come molti allievi credono, bensì 2 (un numero minore di uno dei due fattori).

Risulta allora utile didatticamente lasciare immagini in continua evoluzione cercando di non creare troppo presto modelli forti e stabili del concetto, mettendo in guardia l'allievo che pur essendo un'addizione ripetuta nei naturali, non è detto che il risultato accresca sempre, ma può diventare anche più piccolo, come quando si moltiplica un numero per 0 o si è confrontati con numeri razionali. Si potrebbe mostrare proprio il caso della moltiplicazione di $4 \times 0,5$, ossia di 4 moltiplicato per la metà, che dopo qualche anno scopriranno essere 2, quindi più piccolo di 4.

L'operazione di "moltiplicazione" definita in $\mathbb{Q}$ assume quindi un altro significato rispetto a quella definita in $\mathbb{N}$.

4.8.4 DIVISIONE

La divisione, che si indica di solito con due punti uno sopra l'altro, è l'operazione inversa della moltiplicazione: un numero è divisibile per un altro (purché diverso da zero), se esiste un terzo numero che moltiplicato per il secondo dà il primo.

In pratica, $a : b$ è uguale a c (con b diverso da 0), se $c \times b = a$.

Ad esempio, $6 : 3 = 2$, dato che $2 \times 3 = 6$.

Nell'espressione sopra, a è detto *dividendo* (cioè la quantità da dividere), b è detto *divisore* (cioè la quantità che divide) e c è detto *quoto*.

In certi contesti, per indicare una divisione si usa al posto dei due puntini un trattino disposto così / o così – (che si legge "su" o "fratto"). Il trattino viene solitamente usato in una frazione. Va osservato che se $a : b = c$, allora $a : c = b$, sempre che b e c siano entrambi diversi da zero; ad esempio, se $6 : 3 = 2$, allora $6 : 2 = 3$.

Occorre sempre ricordare che la divisione per zero non viene definita, per questo l'abbiamo sempre escluso tra i divisori.

Per capire con più profondità come si comporta lo 0 nella divisione, effettuiamo una prova: mettiamo 0 al primo posto. Quanto fa $0 : 4$? Bisogna dunque trovare un numero che, moltiplicato per 4, dia 0, e questo numero è 0; infatti $0 \times 4 = 0$. Dunque $0 : 4 = 0$.

Mettiamo 0 al secondo posto. Quanto fa $4 : 0$? Bisogna trovare un numero che, moltiplicato per 0, dia 4. Ma un tal numero non esiste; sappiamo infatti che qualsiasi numero, moltiplicato per 0, dà 0 e dunque non potrà mai dare 4. Quindi, banalmente, $4 : 0$ non si può fare. È un errore sintattico: si dice che il calcolo è impossibile. In particolare, dunque, $0 : 0$ non si può scrivere, dato che 0 apparirebbe al secondo posto. Andando più in profondità si vede che i numeri che moltiplicati per 0 darebbero 0 sarebbero infiniti (0, 1, 2, 3, ...), quindi in questo caso il calcolo risulterebbe indeterminato.

Ma a parte lo 0, non è detto che l'operazione di divisione si possa sempre fare: a volte sì, a volte no, come nel caso di $8 : 3$, per la quale non esiste nessun numero naturale che moltiplicato per 3 dia come risultato 8. In questo caso nell'insieme dei numeri naturali occorre far ricorso alla *divisione* detta *euclidea*, in onore di Euclide: dati due numeri naturali a e b , con b diverso da 0, esistono due numeri q e r , detti *quoziente* e *resto*, tali che $a = b \times q + r$ e $0 \leq r < |b|$ (si dimostra che tale coppia di numeri naturali esiste ed è unica).

Al di là di questa stravagante divisione che contempla il resto, possiamo affermare che la divisione non è un'operazione interna a $\mathbb{N}$, dato che non è sempre possibile eseguire le divisioni senza considerare il resto. Per riuscire a risolvere tutte le divisioni occorre ampliare l'insieme dei numeri naturali e considerare i razionali $\mathbb{Q}$. Ora sì che finalmente si potranno eseguire tutte le divisioni!

La divisione non gode dell'elemento neutro, né delle proprietà commutativa e associativa. Per la divisione vale la proprietà *invariantiva*, ovvero il quoziente non cambia se dividendo e divisore sono moltiplicati o divisi per una stessa quantità diversa da zero (il resto invece risulta moltiplicato per quella quantità); ad esempio, data la divisione $10 : 2$, se si moltiplicano sia il dividendo sia il divisore per 3 si ottiene $30 : 6$, il risultato di entrambe le divisioni è 5.

Aspetti didattici. L'idea intuitiva di dividere legata alla partizione o suddivisione di oggetti è concepita già dai bambini di scuola dell'infanzia, essendo legata al vissuto reale.

In alcuni casi tale divisione viene confusa con la condivisione ("Dare un po' di gelato a Federico, che è mio amico!"), senza considerare particolari criteri, come ad esempio la stessa numerosità.

Pur essendo inizialmente abbastanza intuitiva e legata al vissuto, dal punto di vista formale, però, la divisione risulta essere l'operazione più complicata, sia per i suoi molteplici significati, a volte confusi con la moltiplicazione, sia per il suo algoritmo scritto, assai complesso e poco intuitivo.

Consideriamo anche in questo caso diversi esempi che contemplano differenti significati della divisione $24 : 6$.

1. Carlo deve riporre i suoi 24 libri di fumetti in 6 scatole in modo tale che in ogni scatola ci sia lo stesso numero di libri. Quanti libri metterà in ogni scatola?
2. Luca vuole dividere i suoi 24 berretti sportivi a 6 a 6 in scatole tutte uguali. Quante scatole gli servono?
3. Michele compra 6 litri di succo di frutta e paga 24 franchi. Quanti franchi costa 1 litro di succo?

Ognuno di questi esempi mostra un significato diverso della stessa parola "divisione", anche se esprimibile con un'unica scrittura formale; significati che vanno gradualmente accettati e compresi da parte degli allievi.

Un errore tipico nella risoluzione di problemi che coinvolgono questa operazione è di invertire il ruolo del dividendo con quello del divisore; ciò porta però a una risoluzione sbagliata del problema, dato che la divisione non gode della proprietà commutativa.

Inoltre, così come avviene per la moltiplicazione, per la quale si ipotizza che debba sempre accrescere la grandezza dei fattori, anche per la divisione si genera nella mente degli allievi una convinzione per così dire “simmetrica”, legata all’idea che “diminuisce sempre”, ossia ci si immagina il risultato più piccolo del dividendo.

Tale misconcezione produce erronee conseguenze in vari contesti: dovendo scegliere quale tra le due operazioni $4 \times 0,5$ e $4 : 0,5$ dia come risultato 2, diversi allievi propendono per la divisione, convinti appunto che la divisione faccia trovare un risultato più piccolo del dividendo.

Va inoltre ricordato che, se non si lavora in modo consapevole, si può correre il rischio di dare allo studente un altro modello intuitivo che finirà con il produrre una misconcezione: in una divisione $a : b$, il numero a deve sempre essere maggiore del numero b (si deve sempre dividere un numero grande per uno piccolo).

Lo stesso modo in cui la divisione è proposta fin dalle prime volte a scuola spinge a credere in ciò: si tratta sempre di ripartire molti oggetti tra poche scatole o di contenitori che raccolgono diversi oggetti ciascuno. Ma ciò comporta allora che, di fronte ad una proposta del tipo: «15 amici si dividono 5 chilogrammi di biscotti. Quanti ne spettano a ciascuno?», l’allievo è spinto a eseguire $15 : 5$, invece di $5 : 15$, calcolando così quanti amici spettano a ciascun chilo di biscotti! Eppure fin dalla scuola dell’infanzia si è abituati a dividere una mela tra due bambini, facendo $1 : 2$, ottenendo così due metà di un’unica mela, o una tavoletta di cioccolata tra quattro bambini, ma poi tali situazioni non vengono riprese durante i primi anni di scuola elementare, quando viene introdotta intuitivamente la divisione.

Sarebbe invece importante far ragionare costantemente gli allievi sulle divisioni legate al contesto reale, dove il dividendo è minore del divisore, senza fissare invece per anni la convinzione che ciò non possa avvenire.

Anche in questo caso, rendere gli allievi consapevoli di questi aspetti nel corso del secondo ciclo, riflettendo con loro in modo critico e mettendoli in guardia su ciò che si verificherà quando si amplierà l’insieme numerico, consente di limitare l’insorgere di eventuali erronee convinzioni.

4.8.5 STRATEGIE DI CALCOLO

Il calcolo è un argomento centrale dell’apprendimento matematico, che risulta funzionale a tutti gli ambiti della disciplina e a tutte le diverse aree culturali. Può essere considerato come un processo mentale che trasforma più dati in ingresso in uno o più risultati. Il termine calcolo ha assunto oggi diversi significati anche assai distanti rispetto a quello classico di “calcolo aritmetico” (si parla ad esempio di “calcolo della probabilità” o di “calcolo di una strategia”).

Lo stesso calcolo aritmetico, basato prevalentemente su algoritmi definiti, a volte concepiti come univoci, nel tempo ha cambiato significato, assumendo oggi una connotazione più strategica e ampia. Ciò è principalmente dipeso dalla diffusione generalizzata dei più svariati mezzi tecnologici, che ne ha influenzato il ruolo e le caratteristiche, e dall’importanza che assume attualmente la risoluzione di problemi nella formazione del futuro cittadino.

Il calcolo aritmetico trova infatti oggi la sua principale ragione d’essere nei processi risolutivi di situazioni-problema nel cui contesto va opportunamente affrontato, sviluppato ed

esercitato. Questo non toglie che risulta ancora oggi fondamentale nella scuola elementare saper gestire calcoli aritmetici, non affrontati in modo meccanico e acritico e basati esclusivamente su algoritmi tradizionali, bensì concepiti in modo più ampio e consapevole.

È infatti importante saper gestire calcoli prevalentemente mentali, basati su strategie personali che tengano conto delle proprietà dei numeri e delle operazioni, e che non portino solo ad un risultato esatto, ma che coinvolgano anche stime e approssimazioni legate ad apprendimenti superiori, come l'analisi e la sintesi, l'intuizione e l'invenzione. Si tratta dunque di un approccio strategico del calcolo mentale che rafforza la padronanza del valore posizionale delle cifre, alimentando il senso del numero, della stima e del controllo delle soluzioni.

La stima computazionale, legata ai risultati di un calcolo, si basa sul saper trasformare con consapevolezza i numeri o un problema, dalla sua forma originale a una nuova forma che dia approssimativamente una risposta equivalente e che sia facilmente risolvibile mediante calcolo mentale. È proprio il processo di semplificazione dei numeri o del problema, sui quali si innesta poi il calcolo mentale, che porta ad ottenere risultati approssimati e non esatti: per questo, talvolta, si usa l'espressione calcolo mentale approssimato in riferimento alla stima computazionale.

Aspetti didattici. All'ingresso della scuola elementare i bambini hanno già alcune concezioni relative a calcoli di tipo additivo basate su strategie di conteggio che iniziano a padroneggiare tramite l'uso delle dita delle mani, manipolate in modi assai diversificati e personali, spesso accompagnate da forme verbali. Su queste concezioni spontanee va costruito l'apprendimento, senza imporre troppo presto eccessivi formalismi, i quali si basano soprattutto su convenzioni di scrittura e meccanismi univoci. È poi grazie alla condivisione di diverse strategie utilizzate dai vari allievi per effettuare un calcolo, e dalla valutazione dei punti di forza e di debolezza di ciascuna, che è possibile farle evolvere. È importante osservare che la condivisione porta a una pluralità di strategie che possono anche coesistere per più tempo. In questa evoluzione, poi, risulta importante mostrare analogie e differenze tra tipologie di calcoli per riconoscerne elementi comuni e generalizzabili. Si passerà in seguito a calcoli che coinvolgono anche le altre operazioni. I tipici apprendimenti funzionali alle strategie di calcolo, come individuare gli addendi che sommati danno il 10, apprendere in maniera sicura le caselline/tabelline relative alla moltiplicazione, risultano ancora oggi importanti per favorire un approccio più efficiente del calcolo a mente.

Risulta però importante distinguere ciò che deve essere appreso in modo automatico (come i due addendi che danno il 10, le caselline/tabelline entro il 10), così da poter abbandonare le lente procedure di conteggio, da ciò che deve rimanere ragionato, ossia basato sul cosiddetto calcolo pensato o cosciente.

Anche gli algoritmi tradizionali di calcolo possono essere mostrati per comprenderne il funzionamento, mettendoli eventualmente a confronto con altri in uso in differenti culture o in diversi momenti storici, ma ciò che va privilegiato è il calcolo mentale, ossia quello ragionato.

Gli algoritmi possono anche essere eseguiti con carta e penna, ma - a differenza del calcolo scritto tradizionale in colonna - si può svolgere il calcolo in riga o comunque secondo algoritmi "spontanei".

Gli algoritmi scelti non sempre devono portare a un calcolo esatto, ma occorre anche richiedere la stima del risultato di un calcolo, prevedendone l'ordine di grandezza o un risultato approssimato.

Va considerato che le diverse strategie di calcolo, sia scritto sia mentale, vertono prevalentemente sulle proprietà dei numeri e delle operazioni, che devono essere comprese, gestite e utilizzate in modo strategico dagli allievi.

Alla fine del secondo ciclo la stima può essere anche accompagnata da un uso sensato ed efficace della calcolatrice, così da valutare l'attendibilità della stima effettuata; tale strumento può essere introdotto mostrandone benefici e limiti, anche attraverso vere e proprie sfide tra calcolo mentale gestito dagli allievi e calcolatrice, così da sviluppare anche senso critico nei confronti delle tecnologie. La calcolatrice o altri mezzi informatici possono costituire utili strumenti da usare per eseguire calcoli di una certa complessità, in situazioni in cui occorre lavorare sui risultati in modo sperimentale o in cui è importante puntare sul processo risolutivo di una situazione-problema e non sui singoli calcoli. Nella risoluzione di problemi, i processi di stima e controllo dei risultati possono educare gli allievi a non trascurare le importanti fasi di interpretazione e validazione dei risultati nel ciclo della matematizzazione (ciclo messo in evidenza dalla valutazione standardizzata internazionale PISA e che riassume i processi di risoluzione dei problemi), che vengono messi in campo nella delicata fase di ritorno dalla soluzione matematica al problema reale di partenza. Inoltre, il calcolo mentale e la stima favoriscono una particolare attenzione al procedimento risolutivo, piuttosto che al prodotto finale, promuovendo la ricerca di molteplici strategie personali. La stima, infine, coinvolge importanti fattori psicologici-affettivi quali la confidenza nelle proprie capacità e la tolleranza all'errore.

Lo scopo è di sviluppare una competenza nell'affrontare e risolvere situazioni problema riconducibili alle quattro operazioni, fondata sul possesso di un bagaglio tecnico-algoritmico utile nella vita quotidiana che permetta di trovare delle soluzioni, di presentare e giustificare i procedimenti messi in atto, di giudicarne l'attendibilità, procedendo anche per tentativi nel caso di situazioni poco familiari.

Cenni storici. Il calcolo ha origini storiche molte antiche, legate all'uso delle dita delle mani, delle parti del corpo e di oggetti concreti come sassolini, conchiglie, bastoncini di legno, oggetti d'argilla, che sono presenti nelle diverse epoche e nelle diverse culture.

La mancanza di un sistema posizionale in culture come quella Greca, Etrusca, Latina e Romana rendeva impossibile l'uso di algoritmi per come li intendiamo noi oggi e dunque fiorirono e si diffusero vere e proprie macchine da calcolo, dette abachi.

Ad esempio, la tavola di Salamina ha rappresentato un formidabile strumento di calcolo aritmetico diffuso nel mondo greco soprattutto nell'epoca compresa tra il VI e il V secolo a. C.

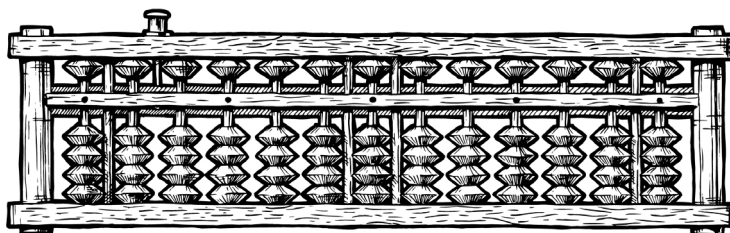


*Tavola di Salamina, la macchina di calcolo in marmo bianco
è conservata nel Museo epigrafico di Atene.*

Questo strumento di calcolo non è molto diverso da quelli usati successivamente dai contabili medievali in Europa e forse apparteneva dunque a qualche addetto alla riscossione dei tributi o, più probabilmente, era stata usata in qualche scuola per contabili.

Nelle scanalature si ponevano e poi si facevano scorrere palline o sassolini, in latino *calculi*, da cui l'odierno nome italiano calcolo e il verbo calcolare.

Ma l'abaco non fu inventato solo alle nostre latitudini, nell'oriente l'abaco ha origini ancora più antiche ed è ancora utilizzato; in Cina è attualmente conosciuto con il nome *suan-pan*, in Giappone con il nome di *soroban*. Il soroban risultava sicuramente lo strumento di calcolo aritmetico più veloce prima della diffusione delle calcolatrici elettroniche e in un certo senso, per un certo periodo, anche dopo.



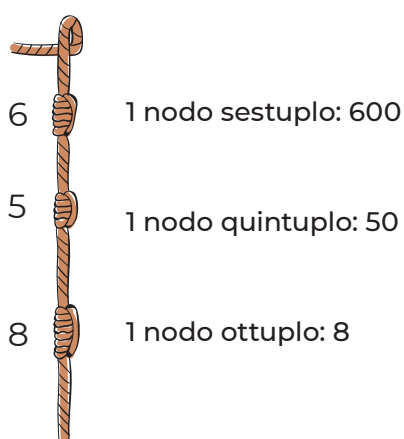
Soroban giapponese.

Anche gli Aztechi e gli Inca avevano creato degli abachi e così fecero le culture ad essi collegate.

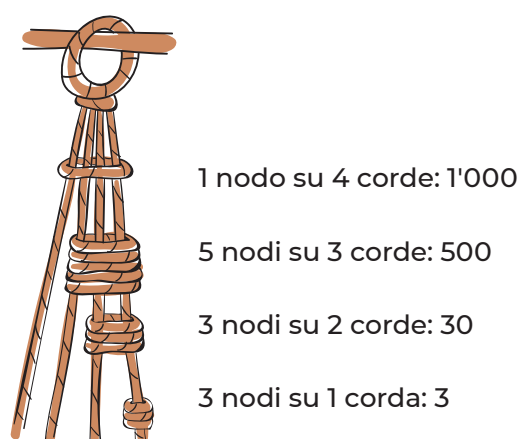
Una delle macchine di calcolo incaiche più famose è la *yupana*, una scacchiera tuttora in uso soprattutto per motivi didattici in alcuni paesi dell'America Meridionale.

Un altro strumento servito non solo a memorizzare o rappresentare numeri, come si credeva all'inizio, ma anche a eseguire calcoli, è il *quipu*, che vuol dire nodo.

Un'evoluzione del quipu, tuttora in uso presso alcune popolazioni autoctone della Bolivia e del Perù, è il *chimpu*. In questo caso le cordicelle del quipu sono sostituite con un fascio di sottili cordicelle che mostrano con maggiore chiarezza l'ordine decimale corrispondente: 3 nodi su una sola cordicella del fascio indicano 3 unità, 3 nodi su due cordicelle simboleggiano invece 3 decine, 5 nodi su tre cordicelle rappresentano 5 centinaia e così via.

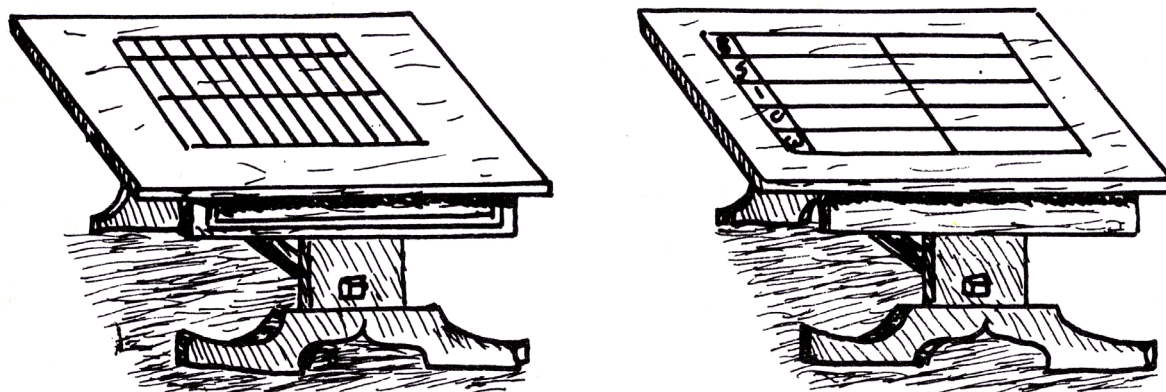


Un esempio di quipu in cui è rappresentato il numero 658.



Un esempio di chimpu in cui è rappresentato il numero 1'533.

Uno degli abachi più diffusi nell'Europa occidentale, dalla penisola iberica alla Germania, era l'abaco a righe medievale.



Abachi a righe medievali.

Si tratta di una tavola orizzontale sulla quale vi sono righe parallele, orizzontali e verticali, che formano regioni rettangolari ciascuna delle quali indica un diverso ordine decimale, la prima in basso indica le unità e così di seguito verso l'alto. Sulle righe si dispongono gettoni il cui valore dipende dalla posizione; ma si possono anche porre gettoni tra una riga e l'altra per indicare 5 (tra la prima e la seconda, unità e decine), 50 (tra la seconda e la terza, decine e centinaia) e così via. Così facendo su una stessa riga vi sono al massimo 4 gettoni e tra l'una e l'altra al massimo uno. Siccome con questo strumento si raggiungevano cifre enormi (per l'epoca) ci si serviva di crocette per separare le cifre fino a 999, poi le migliaia, i milioni, come si fa ancora oggi con i puntini; ad esempio $3 \times 245 + 765$, che oggi si scriverebbe $3'245'765$.

I vari tipi di abaco adottati avrebbero potuto dunque indurre i contabili a sfruttare il principio posizionale per scrivere i numeri, già diffuso nel mondo islamico, ma ancora non presente in quello cristiano; ciò avrebbe consentito così di sfruttare i metodi algoritmici arabi, rapidi ed efficaci. Ma i contabili di scuola abacista non accettarono per vari secoli questa idea che a noi sembra oggi così naturale. Il nostro attuale agevole sistema di numerazione posizionale fu ideato nell'India del Nord attorno al V secolo, si diffuse nel mondo arabo e infine entrò nel bacino del Mediterraneo e in Europa.

Vari autori di diversa estrazione sociale e culturale contribuirono a diffondere in Europa le nuove idee sul calcolo aritmetico provenienti dall'India e dal mondo arabo. Tra questi il più noto è il mercante italiano Fibonacci, che nel 1202 presentò un'opera manoscritta formata da quindici capitoli dal titolo *Liber Abaci*, ossia Libro dell'abaco, libro del calcolo, diventato un classico, celebre in tutto il mondo. In questo libro non si parla dell'abaco come strumento, bensì delle nove "cifre" indiane (le *figure delli Indi*), del "segno" zero della numerazione indiana, dei nuovi algoritmi e di vari problemi famosi (ad esempio, il "problema dei conigli" che ha dato origine alla famosa "successione di Fibonacci"). Il *Liber Abaci* di Fibonacci costituisce il primo contributo alla diffusione in Occidente di modalità di calcolo più funzionali rispetto a quelle che tradizionalmente si servivano dell'abaco, dato che sfruttano appieno la potenza del sistema posizionale.

Dunque, fu solo nel corso del XIII secolo che cominciò lentamente e con difficoltà a diffondersi in Europa il calcolo aritmetico scritto che sostituì gradualmente l'uso dell'abaco. Il nuovo calcolo veniva chiamato *algoritmo* dal nome del matematico persiano Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī (ca. 780–850), autore di un trattato di aritmetica scritto verso l'830 e tradotto in latino con il titolo *Algoritmi de numero Indorum* (spesso tradotto: *Sul calcolo numerico degli Indi*).

Un notevole impulso alla diffusione delle nuove tecniche di calcolo fu dato anche dall'invenzione della stampa e, dunque, della maggior diffusione dei trattati di aritmetica che affrontavano questo tema. Tutti gli storici concordano sul fatto che il primo trattato a stampa di aritmetica apparve a Treviso nel 1478, *L'arte de labbacho*, meglio nota come *Aritmetica di Treviso*.

Fu una dura e strenua lotta quella che contrappose per buona parte del Medioevo e l'inizio del Rinascimento gli abacisti, strenui difensori del metodo degli antichi romani, che utilizzavano i sassolini, e gli algoritmisti, sostenitori del nuovo sistema posizionale di derivazione orientale, con l'uso dello zero e i calcoli fatti a mano con carta e calamaio. Questi ultimi trionfarono definitivamente soltanto nel corso del XVI secolo. Una lotta che per certi versi appare oggi analoga a quella tra il calcolo scritto e l'uso della calcolatrice elettronica. Furono molti gli algoritmi inventati dalle diverse culture che sono ancora oggi molto interessanti per essere analizzati ed eventualmente utilizzati in classe. Uno dei più celebri riguarda l'algoritmo moltiplicativo detto "la fulminea" che ebbe una notevole diffusione



Allegoria dell'aritmetica tratta da Gregor Reisch, Margarita Philosophica, 1503.

nell'Europa medievale, dove venne chiamata “moltiplicazione per graticola” (piccola grata o inferriata) o “per gelosia” (telaio fisso o mobile di una finestra che permette di vedere solo in uno dei due sensi) a causa della configurazione finale che si ottiene.

Presentiamo un esempio di utilizzo di tale algoritmo. Supponiamo di voler moltiplicare 8'357 per 94. Disponiamo le cifre (usiamo quelle attuali) come indicato:

	8	3	5	7
9				
4				

Eseguiamo ora i prodotti parziali, che naturalmente non avranno “riporti” dato che, al più, saranno formati da due cifre, e disponiamoli come segue:

	8	3	5	7
9	7 2	2 7	4 5	6 3
4	3 2	1 2	2 0	2 8

Tracciamo ora tutte le diagonali dei rettangoli, congiungendo quelle contigue:

	8	3	5	7
9	7 2	2 7	4 5	6 3
4	3 2	1 2	2 0	2 8

Addizioniamo ora i singoli termini seguendo le direzioni indicate dalle diagonali, e riportando, eventualmente, le cifre relative alle decine, alla successiva somma.

	8	3	5	7	
9	7 2	2 7	4 5	6 3	
4	3 2	1 2	2 0	2 8	
7	8	5	5	5	8

Algoritmo moltiplicativo "la fulminea".

Otteniamo come risultato il numero richiesto: 785'558.

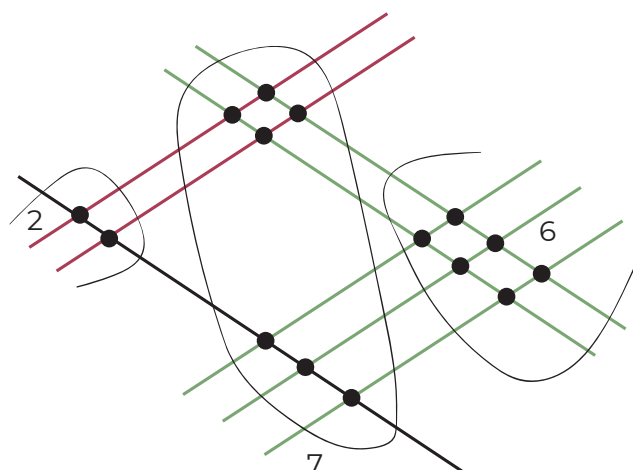
Si noti la semplicità di questo algoritmo della moltiplicazione, la cui origine si perde nei

tempi, e come sia simile al nostro attuale.

Un altro algoritmo che può essere utilizzato per svolgere la moltiplicazione è basato sull'uso di bastoncini cinesi. Riportiamo un esempio della moltiplicazione $23 \times 12 = 276$.

Ogni numero viene rappresentato da due gruppi di bacchette, rappresentanti le decine e le unità. I bastoncini relativi ai due numeri vengono sistemati in due diverse direzioni in modo che si incrocino tra loro. Nel nostro esempio le due bacchette che indicano le decine del 23 incontrano due volte la bacchetta che indica le decine del 12 e quattro volte le due bacchette che indicano le unità del 12.

Gli incroci tra le bacchette delle unità danno le unità del risultato (nell'esempio 6), gli incroci tra le bacchette delle unità e delle decine, sommati, indicano le decine del risultato (nell'esempio $4 + 3 = 7$) mentre gli incroci delle bacchette delle decine indicano le centinaia (nell'esempio 2).



Algoritmo moltiplicativo a bastoncini cinesi.

A partire dal 1500 le tecniche algoritmiche a carattere meccanico nascoste nei calcoli scritti fecero immaginare a menti geniali sempre più evolute macchine calcolatrici, precursore di quelle che intendiamo noi oggi, inventate soprattutto per sostituire l'impegnativo lavoro che doveva compiere il contabile nell'eseguire le operazioni aritmetiche.

È però solo attorno al 1970 che fecero la loro apparizione le macchine calcolatrici cosiddette elettroniche, assai più potenti, duttili ed economiche rispetto a quelle precedenti a manovella. Se a metà degli anni '50 del XX secolo nessuno o quasi possedeva una macchina calcolatrice, solo pochi anni dopo era impensabile non averne una: si è trattato di una rivoluzione sociale, relativa all'idea di calcolo, notevole, anche sul piano didattico. Sempre di più, infatti, furono i docenti che cominciarono a ritenere inutile dedicare ore, settimane, mesi, anni, sforzi all'apprendimento di algoritmi e all'esecuzione di calcoli da effettuarsi a mano. Fino agli anni '70 del XX secolo si usavano tavole scritte per il calcolo dei logaritmi, tavole trigonometriche, regoli da ingegnere con approssimazioni ecc.; tutti strumenti completamente scomparsi dall'uso pratico comune che, semmai, si possono ammirare con curiosità nei musei specifici. Dal punto di vista scolastico, la prima reazione all'uso della calcolatrice in classe fu di allontanamento: guai a quegli studenti che avessero fatto uso delle calcolatrici per effettuare calcoli durante processi algoritmici o per compiere fasi della risoluzione di problemi. In seguito, lentamente, questi strumenti entrarono a far parte della vita di classe.

Il vero sconvolgimento si ebbe però con l'ingresso in scena di due veri e propri geni della matematica, Alan Turing (1912-1954) e John von Neumann (1903-1957), che favorirono l'invenzione del moderno computer (1946), entrato ormai con forza nella nostra società.

4.9 GRAFICI E TABELLE

I grafici e le tabelle sono delle rappresentazioni di dati, espressi in varie forme (numerica, a parole ecc.), che hanno lo scopo di renderli facilmente consultabili e interpretabili.

Le tipologie di grafici e tabelle sono varie e si differenziano in base al metodo di rappresentazione e allo scopo specifico per cui vengono usate. Una rappresentazione può essere quindi più o meno funzionale a seconda dello scopo.

Una tabella è un importante e diffuso strumento utile per organizzare dati e rappresentare relazioni, che vengono riportati nelle celle di intersezione tra le colonne verticali e le righe orizzontali (che possono essere identificate con un nome). Una particolare tabella è il *diagramma di Carroll*, dal nome di Lewis Carroll (1832-1898), che consiste in una rappresentazione a due vie, del tipo sì/no o vero/falso. Una *tabella a doppia entrata* fornisce un'efficace visualizzazione degli insiemi su cui si considera la relazione e delle caratteristiche delle coppie di elementi in relazione (gli incroci); questa rappresentazione può risultare efficace quando non è importante l'ordine tra gli insiemi.

	BLU	ROSSO	ARANCIONE	VERDE
☆				
♥				
△				
☾				

Tabella a doppia entrata.

Il *diagramma sagittale* o *a frecce*, invece, è una rappresentazione che permette di visualizzare tramite collegamenti grafici, come le frecce, le relazioni che sussistono tra elementi di due insiemi.

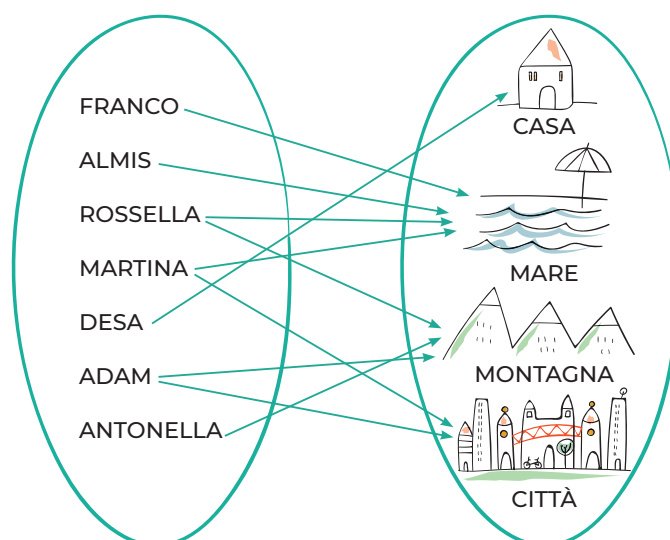
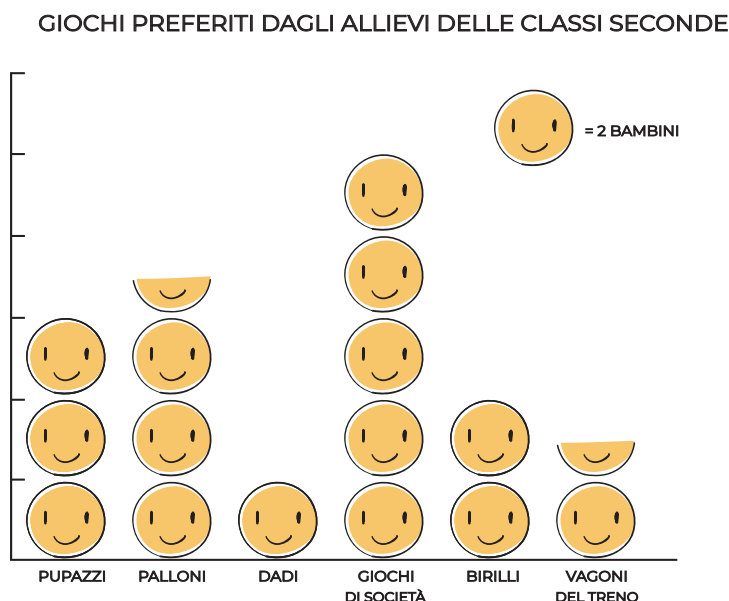


Diagramma sagittale o a frecce.

L'*ideogramma* è una modalità di rappresentazione che usa immagini che evocano il fenomeno o la variabile considerata. È costituito da più simboli uguali ognuno dei quali indica un certo numero di elementi. Tale rappresentazione è molto usata nei quotidiani, in quanto fornisce informazioni di immediata lettura dei dati, soprattutto in termini di confronto, anche se potrebbero risultare piuttosto approssimative.



Ideogramma.

I *grafici a barre*, come ad esempio i grafici a colonne e a nastri (quando i rettangoli sono disposti in orizzontale), sono costituiti da tanti rettangoli quante sono le modalità da rappresentare, che vengono posizionati su un'asse di riferimento *orizzontale* (o rispettivamente *verticale*) e sono separati tra loro. La lunghezza dei lati dei rettangoli che si trovano sull'asse è fissa per ciascun rettangolo e scelta liberamente, mentre l'altezza è proporzionale alla frequenza o all'intensità che rappresentano.

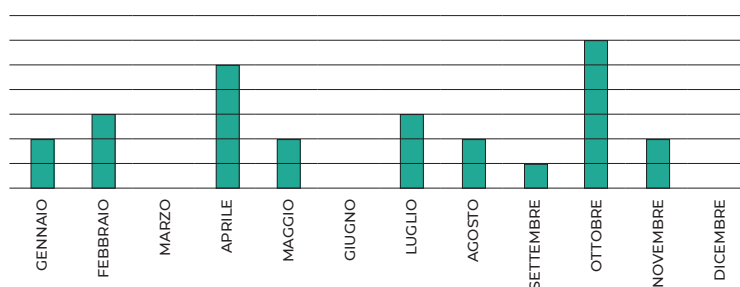


Grafico a barre.

I *grafici a barre* sono assai diversi dagli *areogrammi* e dagli *istogrammi*, in quanto in quest'ultimi casi la frequenza corrisponde all'area delle figure rappresentate di solito rispettivamente con settori circolari o con rettangoli.

L'*areogramma* è un tipo di rappresentazione grafica in cui i dati vengono visualizzati tramite una figura geometrica piana o tridimensionale, suddivisa in regioni le cui aree sono proporzionali ai vari dati a cui si riferiscono. Il numero di dati è spesso espresso in percentuale, ma può

anche essere espresso in forma numerica. Questo tipo di rappresentazione è particolarmente adatto per operare confronti fra diverse grandezze, senza necessariamente riferirsi a un totale.

Quando è importante evidenziare il riferimento a un totale si usa un particolare tipo di areogramma detto *diagramma a torta* o *circolare*, nel quale le varie frequenze percentuali o relative sono raffigurate da ampiezze di angoli di settori circolari che dividono un cerchio. In questo modo l'area di ogni settore circolare risulta proporzionale alla percentuale rappresentata.

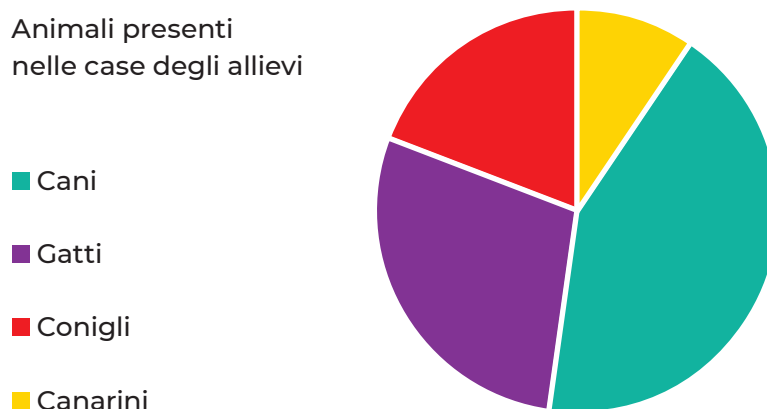
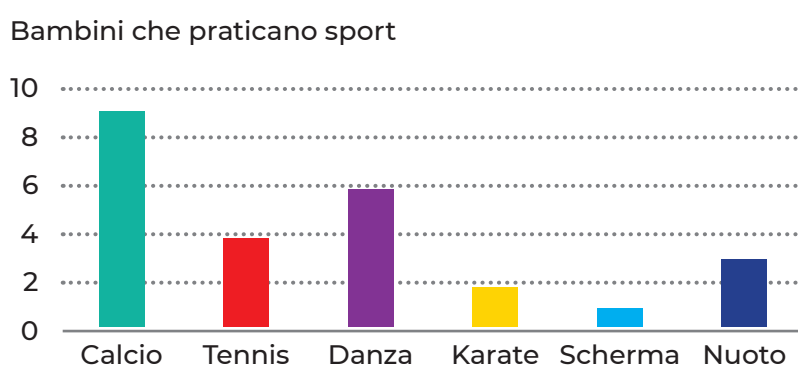


Diagramma a torta o circolare.

Si parla invece di *istogramma* se i dati numerici vengono rappresentati tramite aree di rettangoli, adiacenti tra loro e allineati su un asse orientato, dotato di unità di misura. Ogni rettangolo ha il lato sull'asse orientato di lunghezza pari all'ampiezza della corrispondente classe e l'altezza che rappresenta la densità di frequenza, ossia il rapporto fra la frequenza (assoluta) associata alla classe e l'ampiezza della classe. L'area della superficie di ogni rettangolo coincide con la frequenza associata alla classe cui il rettangolo si riferisce; per tale caratteristica gli istogrammi rappresentano un tipo di areogramma.



Istogramma.

Forse i grafici più conosciuti sono i *diagrammi a due variabili* (x, y) (più raramente a tre) per rappresentare relazioni tra insiemi numerici, che si basano prevalentemente sul concetto di piano cartesiano. Tale piano è costituito dall'asse delle ascisse che rappresenta una retta di riferimento (solitamente caratterizzata dalla lettera x), dall'asse delle ordinate, che

costituisce una retta ortogonale alla precedente (solitamente caratterizzata dalla lettera y) e dall'origine, il punto nel quale si incontrano le due rette. Tramite questi elementi è possibile individuare ogni punto del piano con una coppia di numeri reali chiamati rispettivamente *ascissa* e *ordinata* del punto, i cui valori assoluti rappresentano le distanze del punto rispettivamente dall'asse x (ascissa) e dall'asse y (ordinata). Determinati i punti sul grafico grazie alle due variabili, è possibile unirli se si vuole rappresentare un andamento. Se l'andamento è temporale, per convenzione, si rappresenta lo scorrere del tempo sull'asse orizzontale (x).

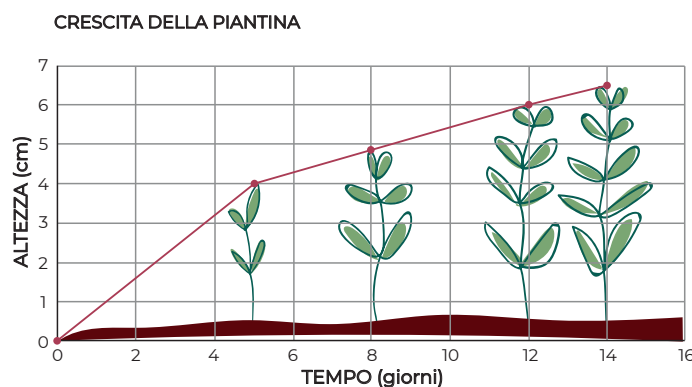


Diagramma a due variabili.

Aspetti didattici. Fin dai primi anni di vita, i bambini iniziano a indagare e a interpretare il mondo e la realtà che li circonda e sentono il bisogno di tradurlo, capirlo e spiegarlo ricorrendo alle prime forme di rappresentazione, mentali e scritte.

L'atto del rappresentare sembrerebbe quindi essere un bisogno naturale presente già nei più piccoli, che nasce anche dalla voglia di comunicare. La rappresentazione viene prodotta dalla mente di ciascun individuo, ma necessita di dati provenienti dall'esperienza. È quindi necessario che a scuola i bambini possano sperimentare e provare, venendo inseriti in contesti e situazioni che richiedono la realizzazione, l'utilizzo, l'interpretazione e la lettura di diverse rappresentazioni che coinvolgano dei dati.

È importante lasciare che gli allievi si esprimano inizialmente liberamente attraverso rappresentazioni spontanee (come disegni, parole e grafici) che si arricchiranno grazie al confronto con quelle degli altri.

Tra le rappresentazioni spontanee di quantità numeriche rilevate dalla vita di classe, come ad esempio la registrazione dei giorni di sole, di pioggia o i giorni nuvolosi che si rilevano in un mese, emergono fin dalla prima elementare i primi spontanei esempi di tabelle, di diagrammi a frecce, di grafici a barre, in alcuni casi anche di areogrammi. Tali rappresentazioni si possono realizzare inizialmente con materiali concreti come scatole, lego, cubetti, per poi passare alla rappresentazione su carta. L'esigenza di voler rappresentare può nascere dal bisogno di comunicare i dati da loro reperiti a vari interlocutori, come compagni di scuola, familiari, oppure un personaggio fantastico. È importante poi riflettere con i bambini su vantaggi e svantaggi delle varie rappresentazioni scelte e come questi variano in base ai diversi contesti. Nel primo ciclo è interessante anche far confrontare gli allievi con vari tipi di grafici e tabelle proposti dal docente in cui si riassumono informazioni o con cui si effettuano giochi, come ad esempio le varie rappresentazioni dei diversi tipi di calendari per la settimana, il mese o l'anno, che ampliano e rafforzano ulteriormente il loro bagaglio di esperienze. Tali rappresentazioni possono essere anche vissute in prima persona con il corpo, come è il caso del gioco del twister o di battaglia navale, che favorisce un primo approccio al piano cartesiano, per poi passare a vivere il microspazio del foglio di carta.

Tra le varie proposte che si riscontrano nella pratica didattica vi è quella di contare raccolte di oggetti e di registrarne il numero. Da questo punto di vista occorre fare attenzione, perché se si vuole lavorare sul numero di elementi e sul confronto di numerosità, non bisogna inizialmente rafforzare la misconcezione che ci sia una dipendenza tra la numerosità e la misura della rappresentazione (la colonna più "alta" sarà sicuramente la più numerosa), perché questa dipendenza nella realtà non sempre si verifica: la numerosità di raccolte di oggetti non dipende infatti dalla loro grandezza. Rappresentazioni iniziali del tipo: a zero corrisponde il niente; all'uno, un quadratino; a due, due quadratini congruenti sovrapposti; a tre, tre quadratini congruenti sovrapposti ecc., proposte troppo presto, possono generare convinzioni erranee come a metrica è associata quantità. In effetti, una cosa è la lettura di un grafico a barre da parte di un bambino che ha già imparato a contare gli oggetti indipendentemente dalla loro grandezza, altra cosa è l'immagine che si fa chi deve ancora apprendere tali concetti; se l'obiettivo è far capire agli allievi il concetto di numero, sicuramente i grafici a barre non aiutano la formazione di tale sapere. Didatticamente converrebbe far contare insieme formati da oggetti di tipologia e dimensioni diverse, far costruire grafici spontanei eventualmente costruiti con oggetti diversi come forma e dimensione, per fare così intuire che la numerosità non dipende dalla metrica degli oggetti. Successivamente, quando il concetto di numero si sarà formato nella mente degli allievi, si potranno proporre situazioni legate al vissuto rappresentate poi con grafici a barre convenzionali.

Nel secondo ciclo è inoltre possibile approfondire in modo sempre più consapevole la raccolta e il trattamento dei dati. Prima di tutto occorre stabilire il problema che si vuole studiare, ossia che cosa si vuol conoscere con l'indagine, e le modalità di rilevazione, ovvero quali e quanti dati si vogliono o possono raccogliere e in che modo viene effettuata.

I problemi possono scaturire da diversi contesti vicini al vissuto degli allievi (provenienza geografica o sport praticati degli allievi della scuola, altezza media o altre caratteristiche degli allievi ecc.) e possono essere rappresentati tramite grafici o tabelle, cercando di considerare criticamente i diversi tipi di rappresentazione possibili per poi individuare quello più efficace per lo scopo comunicativo che ci si è prefissati. Tra questi tipi, si può far uso anche di quelli convenzionali.

Ciò che importa non è certamente il nome delle diverse tipologie di grafici e tabelle, ma il saperle creare, leggere e interpretare, che costituisce una delle competenze fondamentali per il futuro cittadino.

Nel terzo ciclo della scuola dell'obbligo tale competenza rientrerà nell'ambito Funzioni.

Cenni storici. L'esigenza di leggere, interpretare e rappresentare il mondo è sempre stata una costante dell'essere umano.

Fin dall'antichità, in diverse civiltà, come quella mesopotamica, nell'antico Egitto, nel popolo ebraico, nell'antica Roma, l'uomo ha raccolto informazioni relative alla popolazione per fini fiscali o militari. La raccolta di questi dati veniva rappresentata principalmente sotto forma di lunghe tabelle.

Invece, per quanto concerne la storia dei grafici maggiormente usati oggi per la lettura di dati, un periodo fondamentale è stato quello tra il XVI e il XVII secolo, detto dell'algebra simbolica, che si è sviluppato grazie soprattutto all'opera dei francesi François Viète e René Descartes (Cartesio).

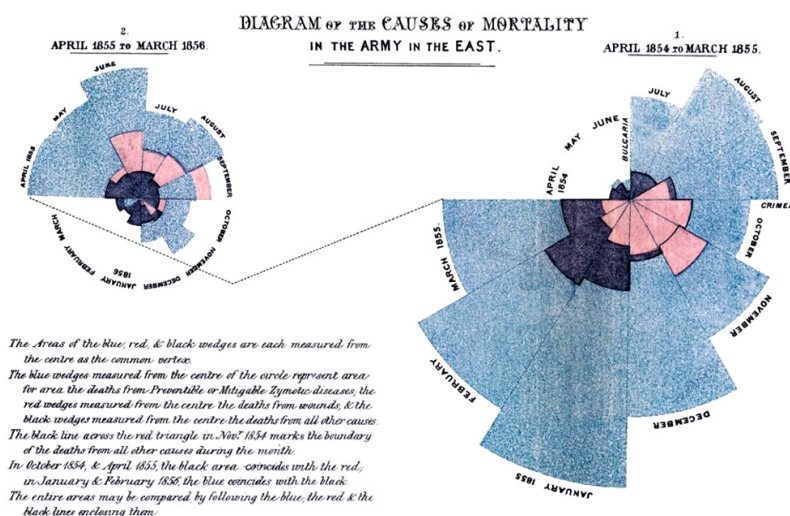
È a Cartesio che si deve la nascita nel 1637 del sistema di riferimento, detto appunto cartesiano, che identifica una specifica posizione di un punto o di un oggetto su una superficie. Grazie a Cartesio fu così introdotto quell'importante legame tra algebra e geometria, in un

metodo che viene ancora oggi riconosciuto e denominato “geometria analitica” e che fu in seguito sviluppato e perfezionato da altri matematici, primo fra tutti Pierre de Fermat. L'importanza del lavoro di Cartesio sta nel metodo individuato, che ha come scopo la creazione, tramite la matematica, di uno strumento per descrivere la realtà delle scienze naturali, in particolare della fisica e della meccanica; la matematica venne così ad assumere un ruolo di primissimo piano, per le impareggiabili potenzialità di oggettività e di rigore che sono state poi applicate in tutti i campi del sapere attuali.

Tra il XVII e il XVIII secolo aumentò anche l'interesse per la raccolta di numeri che descrivevano la situazione dei vari paesi del mondo, così da aiutare a prendere decisioni economiche e sociali sulla base della previsione di determinati fenomeni. In questo periodo prese forma la moderna *statistica*, una scienza matematica in grado di raccogliere e interpretare i dati, in modo da studiare fenomeni collettivi di qualsiasi tipo.

Con il progredire dello studio di questa disciplina, nacque anche l'esigenza di rappresentare i dati in modo che potessero essere facilmente leggibili e interpretabili. È nel 1800 che si iniziò a pensare a organizzare i dati creando areogrammi, istogrammi, ideogrammi ecc., visto che la rappresentazione in tabella non era sempre quella più efficace.

Un aneddoto interessante è quello dell'infermiera Florence Nightingale (1820-1910), nata da una famiglia benestante inglese, che convinse i genitori a ricevere un'istruzione matematica, anche se loro non la ritenevano una materia “adatta alle donne”. Interessata ai problemi sociali dell'epoca, inizia a lavorare come infermiera e a studiare il funzionamento e l'organizzazione degli ospedali dell'epoca e, durante la guerra di Crimea ha l'occasione di raccogliere informazioni sui soldati feriti e sulle loro cause di morte. Decide poi di rappresentare i dati raccolti in grafici, che lei chiama *coxcombs*, che rappresentano i predecessori dei moderni areogrammi. Grazie a questi suoi studi riesce a stabilire che i soldati hanno più probabilità di morire per una malattia non curata che per una ferita riportata in battaglia e a dimostrare che migliorando le condizioni sanitarie degli ospedali si poteva ridurre il tasso di mortalità dei pazienti. È considerata la fondatrice dell'infermieristica moderna, grazie al suo contributo nella riforma del sistema sanitario e ai numerosi libri e manuali che scrisse per trasmettere le sue idee e conoscenze sul mestiere di infermiere; è inoltre anche la prima donna ad essere stata ammessa alla Royal Statistical Society, importante istituzione per la statistica britannica e mondiale.



I grafici prodotti da Florence Nightingale.

Grazie alla tecnologia, oggi è molto più agevole ed efficace raccogliere ed elaborare dati. Uno dei settori oggi in grande espansione è proprio quello dell'analisi dei dati: le persone che lavorano in questo campo sono dette *data analyst*. Un *data analyst*, oltre ad avere competenze in matematica e in informatica, deve avere anche buone abilità di comunicazione per poter spiegare e diffondere i risultati delle sue analisi. Per questo è molto importante scegliere la rappresentazione migliore dei dati raccolti, così da rendere chiari i risultati delle proprie ricerche a tutti. Ci sono persone specializzate solo in questo specifico campo, detto *data visualisation*.

4.10 COMBINATORIA E PROBABILITÀ

La combinatoria è quella parte della matematica che studia l'enumerazione, le combinazioni e le permutazioni di un insieme di elementi e le relazioni matematiche che descrivono le loro proprietà. Di solito si occupa di situazioni pratiche e di problemi i cui aspetti essenziali si possono esprimere con modelli discreti. Alcuni esempi di queste situazioni sono: le disposizioni delle persone intorno ad un tavolo circolare, le estrazioni di palline di colori diversi da un'urna, le diverse disposizioni di oggetti ecc.

Per parlare invece di probabilità è necessario chiarire che cosa si intende per *evento*. Un evento è un enunciato relativo a una prova, per il quale si possa stabilire se, dopo l'esecuzione della prova, tale enunciato sia vero o falso, cioè se l'evento associato si è verificato o no. Un evento è detto *certo* se è sicuro che l'evento si verifichi; è invece detto *impossibile* se è sicuro che l'evento non si verifichi, indipendentemente dall'esecuzione della prova. Un evento è detto *possibile* se si può verificare se non è né certo né impossibile. A un evento viene anche attribuito l'aggettivo *probabile*, che ha un significato un po' diverso rispetto a possibile, dato che esprime non solo una possibilità, ma una possibilità con forte garanzia di esito. Ad esempio, l'evento "esce il 4 lanciando un dado con i numeri da 1 a 6" è possibile, ma non tanto probabile, invece l'evento "esce un numero pari o primo", non è solo possibile, ma altamente probabile; infatti, i numeri che rendono vero l'enunciato sono: 2, 3, 4, 5, 6.

La misura della probabilità che individua il rapporto tra il numero dei casi favorevoli (m) e il numero dei casi possibili (n), è legata alla prima e più intuitiva definizione di probabilità di un evento, chiamata appunto *classica*.

Detto in altro modo, se A è l'enunciato che illustra l'evento, indichiamo con la scrittura $p(A)$ [che si legge in matematica: "pi di A "] la probabilità di A ; allora, possiamo scrivere che: $p(A) = m/n$.

Di solito si dice che un evento certo ha probabilità 1 (o 100%) e che un evento impossibile ha probabilità 0 (o 0%). Di conseguenza, un evento possibile ha una probabilità compresa tra 0 e 1 (tra 0% e 100%). È dunque ovvio che $p(A)$ è 0 se $m = 0$, cioè se non ci sono casi in cui A si verifica; $p(A) = 1$ quando $m = n$, cioè quando in tutti i casi possibili A si verifica; in tutti gli altri casi, cioè quando A è possibile: $0 < p(A) < 1$.

La somma delle probabilità di tutte le uscite (c'è chi li chiama "eventi elementari") di una certa prova è sempre 1.

Nella situazione "gettare una moneta", le possibili uscite sono: testa o croce. La prima ha probabilità di verificarsi $\frac{1}{2}$ e la seconda pure $\frac{1}{2}$. La loro somma è 1. Nella situazione "gettare un dado a forma di cubo", ogni uscita ha probabilità $\frac{1}{6}$ di verificarsi e la somma di tutte le probabilità vale ancora 1.

Due *eventi*, relativi alla stessa prova, sono tra loro *contrari* quando il verificarsi dell'uno rende impossibile il verificarsi dell'altro e viceversa. La somma delle probabilità di due eventi contrari è 1. Ad esempio l'evento A = "Lancio il dado ed esce 6" e l'evento B = "Lancio il dado

ed esce un numero minore o uguale a 5" sono due eventi contrari, $p(A)=\frac{1}{6}$ e $p(B)=\frac{5}{6}$.

Approfondimento. Un esempio di collezioni di oggetti studiate nell'ambito della combinatoria sono le permutazioni di n oggetti. Una permutazione è un modo di ordinare in successione oggetti distinti; un classico esempio è l'anagramma di una parola.

Il numero delle permutazioni di n oggetti si individua tramite il fattoriale di n , che si indica con $n!$.

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdot \dots \cdot 1$$

Infatti, ci sono n modi di scegliere l'oggetto che occupa la prima posizione, $n - 1$ modi di scegliere l'oggetto che occupa la seconda posizione, $n - 2$ modi di scegliere l'oggetto nella terza posizione e così via, fino ad occupare tutte le posizioni.

Ad esempio, le permutazioni possibili della serie di quattro lettere "ABCD" sono le seguenti 24:

ABCD BACD CABD DABC
 ABDC BADC CADB DACB
 ACBD BCAD CBAD DBAC
 ACDB BCDA CBDA DBCA
 ADBC BDAC CDAB DCAB
 ADCB BDCA CDBA DCBA

La definizione di probabilità classica si presta a diverse situazioni: lancio delle monete, dadi, uscita di numeri da un'urna ecc., ma non tutte le situazioni possono descriversi con la probabilità classica. Tale definizione presenta infatti alcuni limiti: è una definizione circolare, dato che richiede che i casi possiedano tutti la medesima probabilità, che è però ciò che si vuole definire; non definisce la probabilità in caso di eventi non equiprobabili; presuppone un numero finito di risultati possibili e di conseguenza non è utilizzabile in situazioni che coinvolgono il continuo.

Per sopperire a tali limiti in matematica si è passati alla definizione di *probabilità frequentista* come il limite cui tende la frequenza relativa dell'evento al crescere del numero degli esperimenti. Tale definizione risulta però poco applicabile nella scuola elementare.

Una definizione di *probabilità* più applicabile è invece quella *soggettiva*, che è applicabile a esperimenti casuali i cui eventi elementari non siano ritenuti ugualmente possibili e che non siano necessariamente ripetibili più volte sotto le stesse condizioni: la probabilità di un evento è il prezzo che un individuo ritiene equo pagare per ricevere 1 se l'evento si verifica, 0 se l'evento non si verifica. Al fine di rendere concretamente applicabile la definizione, si aggiunge un criterio di coerenza: le probabilità degli eventi devono essere attribuite in modo tale che non sia possibile ottenere una vincita o una perdita certa. In tal modo è possibile ricavare dalla definizione soggettiva le stesse regole già viste.

Aspetti didattici. Fin dal primo ciclo è importante abituare l'allievo ad affrontare con interesse e piacere situazioni combinatorie intese a elencare, in casi adeguati e legati prevalentemente al gioco o al quotidiano, tutti e solo gli oggetti in questione.

In tale tipo di esperienze assume una forte importanza il processo di competenza *Esplorare e provare*. Tali attività vanno anche accompagnate alla produzione di ragionamenti e argomentazioni che dimostrino e sostengano la completezza dell'elenco eseguito. Non si tratta dunque di elencare a caso, ma di seguire un criterio sistematico in modo tale che sia possibile mostrare la completezza dell'elenco.

Nella ricerca di tale elencazione, oltre ai registri linguistico e aritmetico, assume molta importanza anche quello figurale, che gli allievi sperimentano spontaneamente o che ricevono come supporto dai docenti, come la tabella a doppia entrata e l'albero combinatorio. Un esempio in ambito aritmetico che ben si addice ad attività combinatorie è la scomposizione additiva (o moltiplicativa) di un dato numero in due, tre, ... addendi (fattori). Nella discussione sulla completezza dell'elenco, nasce il tema della proprietà commutativa. Per esempio: " $2 + 3$ " e " $3 + 2$ " rappresentano la stessa composizione additiva, oppure no? La risposta non è unica: in certe occasioni i due casi sono palesemente diversi, mentre in altre, no. In una situazione puramente matematica, valendo la proprietà commutativa, le due espressioni risultano equivalenti.

Altre tipiche attività sono lo studio degli anagrammi di una parola con lettere diverse, i diversi allineamenti possibili di un certo numero di oggetti dati, i diversi percorsi minimi possibili tra due vertici opposti lungo gli spigoli di un cubo o di un parallelepipedo scheletrato ecc.

Parallelamente alle prime indagini combinatorie è possibile far vivere agli allievi le prime intuitive esperienze legate all'ambito probabilistico. Esse possono essere affrontate mettendo in campo semplici ma significative attività legate principalmente al mondo reale che si basano su giochi, sulla raccolta/esplorazione di dati, sull'incertezza e sulla casualità, con l'obiettivo di sviluppare le competenze che caratterizzano l'alfabetizzazione probabilistica: produrre giudizi probabilistici, interpretare giudizi probabilistici di altri, decidere in situazioni di incertezza.

Non si tratta di affrontare questi argomenti da un punto di vista formale, quanto piuttosto di far vivere esperienze di ragionamento probabilistico che consentano di affrontare con consapevolezza situazioni della vita quotidiana caratterizzate da incertezza, ponendo le basi per sviluppare e consolidare competenza in questo ambito. Si tratta di proporre giochi e situazioni con dadi, mazzi di carte, estrazione di oggetti ecc. attraverso le quali familiarizzare con situazioni caratterizzate da incertezza e con alcuni termini propri del linguaggio probabilistico, come ad esempio "dati" e "insieme di dati", "evento", "certo", "possibile", "impossibile", "numero di possibilità", "poco probabile", "equiprobabile", "molto probabile" ecc. Si tratta in sostanza di consolidare un bagaglio di esperienze vissute, sufficientemente ricco, su cui sviluppare ulteriori competenze nel ciclo successivo.

Cenni storici. Problemi combinatori sono stati studiati fin dall'antichità, ma la combinatoria come branca della matematica è stata riconosciuta solo negli ultimi cinquant'anni. Il suo riconoscimento è avvenuto grazie al contributo di diversi matematici come Netto, MacMahon, König, Hall, Rota, Schützenberger e Erdős.

Anche nell'ambito della probabilità, tentativi di calcolarla in modo ingenuo sono antichissimi, nati soprattutto dal volere prevedere l'esito di giochi, originariamente soprattutto d'azzardo. Che ci fosse un sentimento diffuso di ricerca in tal senso è testimoniato nella *Divina Commedia* di Dante Alighieri, nei primi versi del Canto VI del Purgatorio, dove il poeta racconta del gioco della zara, molto diffuso ai suoi tempi per le strade. Si tratta di un gioco d'azzardo di origine araba che si faceva gettando tre dadi e puntando somme altissime per l'uscita di determinate combinazioni.

Luca Pacioli (XV secolo) fu considerato uno dei primi matematici ad occuparsi di questo tema: egli trattò il problema di dividere equamente la posta fra due giocatori nel caso in cui la partita venisse interrotta prima della fine. Un altro importante spunto venne nel XVII secolo da Antoine Gombaud cavaliere di Méré, famoso per aver proposto problemi inerenti al gioco dei dadi all'amico Pascal. Un risultato considerato evidente dal cavaliere era il seguente: l'uscita di un 6 in 4 lanci di un dado ha la stessa probabilità dell'uscita di un doppio

6 in 24 lanci di due dadi. A prima vista la cosa appare ragionevole... ma qualche calcolo mostra che le cose non stanno così: nel lungo periodo le vincite di un 6 in 4 lanci superano leggermente le vincite dell'uscita di un doppio 6 in 24 lanci di due dadi. Questo e altri problemi furono posti all'amico Pascal, che li risolse scambiandosi lettere con de Fermat, e fondò le basi di una teoria della probabilità che rientrerà nella matematica moderna. La natura di questi problemi, ovvero l'indagine rigorosa sui possibili accadimenti casuali, è un ponte gettato dal mondo della matematica pura al mondo quotidiano, con l'obiettivo di prevedere gli eventi casuali con razionalità. Furono poi altri i matematici che se ne occuparono, come Gauss, Laplace, de Moivre e Bayer e tanti altri in seguito.

BIBLIOGRAFIA

Per redigere queste linee guida si è fatto riferimento ai seguenti testi di cui si è coautrice, che possono essere consultati per eventuali approfondimenti:

- per gli aspetti matematici: Fandiño Pinilla, M.I., & Sbaragli, S. (2011). *Matematica di base per insegnare nella scuola primaria*. Progetto: Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere. Pitagora.
- per gli aspetti didattici: D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2011). *Principi di base di didattica della matematica*. Progetto: Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere. Pitagora.
- per gli aspetti di storia della matematica: D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2017). *La matematica e la sua storia. Dalle origini al miracolo greco*. I volume. Dedalo.
D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2018). *La matematica e la sua storia. Dal tramonto greco al Medioevo*. II volume. Dedalo.
D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2019). *La matematica e la sua storia. Dal Rinascimento al XVIII secolo*. III volume. Dedalo.
D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2020). *La matematica e la sua storia. Dal XVIII al XXI secolo*. IV volume. Dedalo.

Le immagini di questa piattaforma sono state in parte create dal team di progetto e in parte tratte dai seguenti testi:

- Ifrah, G. (1984). *Storia universale dei numeri*. Mondadori.
- Ifrah, G. (1989). *Storia universale dei numeri*. Mondadori.
- Jannamorelli, B. (2017). *Strumenti di calcolo ingenui,... ma ingegnosi e multiculturali*. Pitagora.