

## PROBLEMI

I - II elementare

# RAPPRESENTAZIONI SPONTANEE DI PROBLEMI

Ambiti disciplinari: Numeri e calcolo.



Attivare strategie spontanee nella risoluzione di problemi.



Conteggio in generale; scrittura del numero; operazioni in generale.

Dal punto di vista didattico è importante considerare le diverse strategie spontanee che i bambini mettono in atto, anche in modo intuitivo, per rappresentare e risolvere un problema matematico. È infatti da queste rappresentazioni che si può partire per poi costruire successivi apprendimenti, cercando di rispettare le diverse strategie risolutive senza imporre formalismi eccessivi o prematuri che finirebbero per vincolare la costruzione personale dei concetti matematici da parte degli allievi. Ciò consente un passaggio naturale e graduale da un linguaggio spontaneo a uno convenzionale, limitando forzature formali.

La scrittura formale di un concetto, di un'operazione, di una relazione o di un qualsiasi oggetto

matematico risulta in effetti poco accessibile o, comunque, parzialmente estranea per molti allievi all'ingresso della scuola elementare, ma anche successivamente, quando i diversi concetti vengono affrontati per la prima volta.

Diventa allora più conveniente ed efficace operare all'ingresso della scuola elementare su immagini e rappresentazioni intuitive legate alla propria esperienza e al proprio stile di risolutore di cui gli allievi sono depositari fin dalla scuola dell'infanzia e mantenere questo approccio didattico anche in seguito prima che i concetti vengano formalizzati utilizzando convenzioni in modo vincolante.

## FAR EMERGERE I DIVERSI TIPI DI RAPPRESENTAZIONI

All'inizio della prima elementare è interessante che il docente inventi un problema semplice da proporre agli allievi in forma orale. Il problema deve avere un testo non troppo articolato, per essere facilmente compreso dai bambini e tale da richiamare tipiche situazioni di vita reale che

vengono proposte alla scuola elementare o in ambiente familiare. I numeri coinvolti nel testo devono essere dominabili dai bambini per non creare altre difficoltà che esulerebbero dalla rappresentazione del problema. Sarebbe ancora più significativo se tale situazione scaturisse da un'esperienza vissuta, un gioco, un'attività o una discussione svolta in aula, avente i bambini come protagonisti. La situazione proposta potrebbe coinvolgere una delle quattro operazioni aritmetiche fondamentali, facendo leva sui mo-



delli più intuitivi di tali operazioni (ad esempio, per l'addizione proporre l'unione di due collezioni di oggetti o l'aggiunta di una certa quantità di elementi a un dato insieme). Sono preferibili situazioni dinamiche in cui si ha un certo stato iniziale e un suo perturbamento o variazione. L'allievo sarà così stimolato a immaginarsi la situazione come una brevissima storia, rappresentandosi come la decisione o l'evento perturbante può aver agito sullo stato iniziale, facendolo evolvere, e quale possa essere quindi lo stato finale.

A scopo esplicativo, gli esempi in questa proposta si basano su quattro brevi testi, uno per ogni operazione aritmetica fondamentale.

- **Problema 1:** Leonardo ha 6 palline e suo fratello Francesco gliene regala 2. Quante palline ha ora Leonardo?
- **Problema 2:** Viola ha ricevuto in regalo 8 palloncini, 3 palloncini scoppiano. Quanti palloncini rimangono a Viola?
- **Problema 3:** Anna ha 3 sacchetti di palline, in ogni sacchetto ci sono 4 palline. Quante palline ha Anna in tutto?
- **Problema 4:** Sergio ha 8 fiori, ma ne vuole regalare metà a Leonardo. Quanti fiori dovrà dare a Leonardo?

Il docente presenta il problema oralmente, in un secondo tempo può consegnare il testo scritto. Per stimolare le rappresentazioni mentali del problema, non viene fornito agli allievi del materiale ausiliario con cui poter simulare la situazione, ma viene chiesto loro di rispondere su un

foglio bianco in forma scritta, come meglio credono. Lo scopo è far emergere la rappresentazione interna, spontanea, che ogni bambino si crea per raffigurarsi la situazione, prima di affrontarla e durante la sua risoluzione; avendola richiesta in forma scritta il bambino tenderà quindi di rielaborarla e tradurla in una rappresentazione esterna sotto forma di disegno, simboli, scritte ecc. Occorre tener conto del fatto che la rappresentazione esterna, che il bambino mette nero su bianco, è una sorta di accordo fra quello che egli si rappresenta nella mente e quello che è capace di raffigurare sul foglio, nonché il tentativo da parte dell'allievo di interpretare ciò che l'insegnante si aspetta da lui. In questa traduzione è importante rispettare lo stile personale di ciascun bambino, che molto spesso risulta creativo ed efficace per quanto concerne la risoluzione di problemi, anche grazie alle numerose competenze acquisite alla scuola dell'infanzia e in ambienti extrascolastici.

Sarà fondamentale proporre una messa in comune delle diverse strategie di rappresentazione per chiedere ai bambini di spiegare che cosa hanno fatto sul foglio e per renderli consapevoli del fatto che non vi sia un unico modo e che, anzi, ogni allievo può avere la propria personale strategia. Inoltre per il docente questo lavoro di esplicitazione delle strategie può rivelarsi essenziale per acquisire consapevolezza di quali tipi di rappresentazione siano prediletti da un allievo in determinate situazioni e di quali dunque venga servirsi per comunicare efficacemente con lui.

## QUALI RAPPRESENTAZIONI ASPETTARSI E COME RICONOSCERLE

Le più diffuse rappresentazioni scelte dai bambini per risolvere problemi aritmetici sono le seguenti:

- *pittografica o pittorica*, che riproduce figurativamente gli oggetti della collezione;
- *iconica*, formata da segni grafici che non rappresentano figurativamente gli oggetti in gioco;

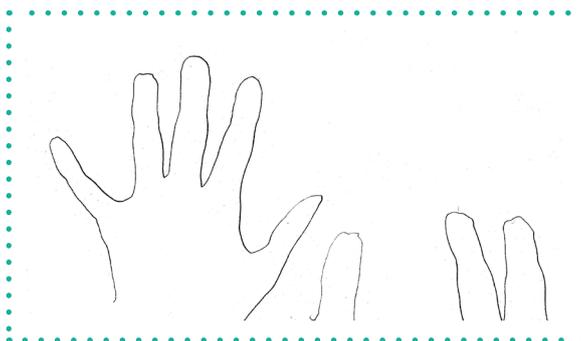
- *linguistica*, espressa a parole;
- *simbolica o aritmetica*, costituita dai numeri indo-arabi veri e propri.

Ciascun allievo utilizza modalità di rappresentazione molto diverse e molto personali che talvolta possono anche essere combinazioni miste di rappresentazioni pittoriche, iconiche, linguistiche e/o simboliche. Le strategie risolutive rese esplicite sul foglio possono mettere in evidenza in rari casi solo lo stato iniziale del problema proposto, in altri solo lo stato finale o l'intero processo risolutivo. A titolo d'esempio, si riportano alcune rappresentazioni fornite da allievi di 5-6 anni, in risposta al *Problema 1*.

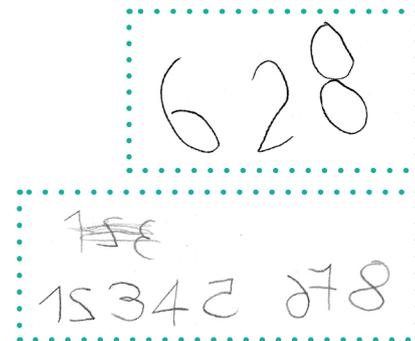




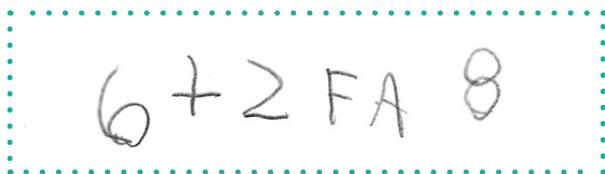
Rappresentazione pittorica



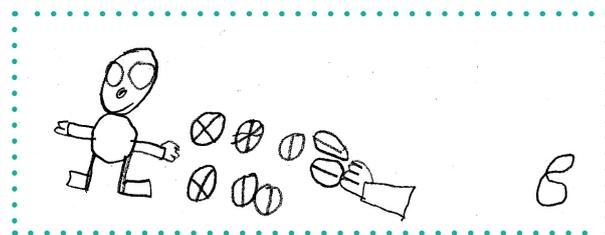
Rappresentazione iconica



Rappresentazioni aritmetiche



Rappresentazione mista: aritmetico-linguistica



Rappresentazione mista: pittorico-aritmetica

È importante educare il bambino, pian piano, a passare dalla rappresentazione che gli viene più spontanea a quella che sembra essere la più vantaggiosa, comunicativa, efficace (in ter-

mini di tempo, per esempio) in quel particolare contesto, lasciando aperta una grande varietà di strategie e rappresentazioni possibili.

## POSSIBILI STRATEGIE RISOLUTIVE

Le strategie risolutive che adottano prevalentemente i bambini per questi tipi di problemi aritmetici, all'ingresso della scuola elementare, si basano in gran parte sul conteggio e sfruttano la disposizione spaziale degli elementi e il registro grafico per comunicare. Riportiamo di seguito alcuni esempi di strategie risolutive adottate nel caso dell'addizione.

- **Contare tutto**, ossia contare a partire da uno tutti gli elementi delle due collezioni da unire:

### Problema 1



Spiegazione dell'allievo: "Ne aveva 6 (disegna 6 pallini, lascia uno spazio), poi 2 (disegna due pallini). Uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto (conta i pallini disegnati seguendo con il dito)".

- **Contare a partire da**, ossia considerare la cardinalità di una delle collezioni come numero di partenza nella conta e aggiungere a uno a uno gli elementi dell'altra collezione; ad esempio:

### Problema 1



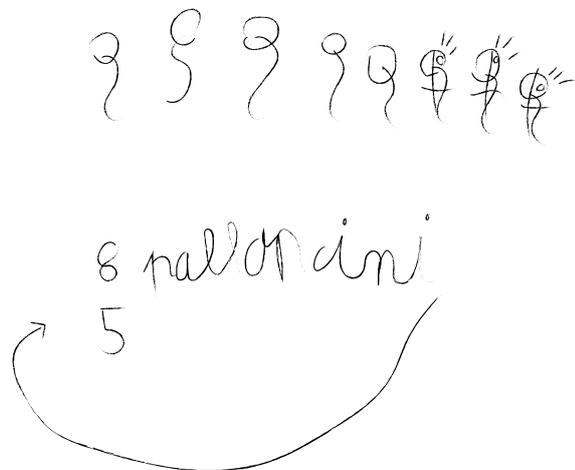
Spiegazione dell'allievo: "Tu mi hai detto che il bambino aveva 6 palline e quindi io dopo mi sono messa in testa il 7, poi ho pensato che dopo il 7 viene l'8, quindi 8".

Riportiamo di seguito alcune strategie di conteggio relative a problemi risolvibili tramite una sottrazione.

- **Togliere e contare**, ossia togliere dalla collezione iniziale gli elementi da sottrarre e contare quelli che restano; ad esempio:



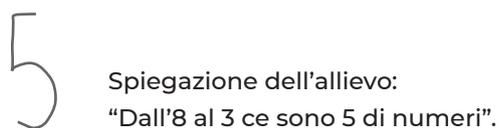
Problema 2



Spiegazione dell'allievo: "Ho pensato a quanti palloncini c'erano, poi ho cancellato e fatto esplodere 3. Poi con il dito ho contato: uno, due, tre, quattro, cinque. Allora vuol dire che ce ne sono solo 5".

- **Contare fino a** (sottrazione per completamento), ossia partire dal numero di elementi che viene sottratto e contare quanti elementi mancano per raggiungere il numero di elementi totali della collezione di partenza; ad esempio:

Problema 2



In problemi che si risolvono con una moltiplicazione, i bambini ricorrono spesso alle stesse strategie utilizzate per l'addizione ma ripetendole tante volte quante ne indica il testo; ad esempio:

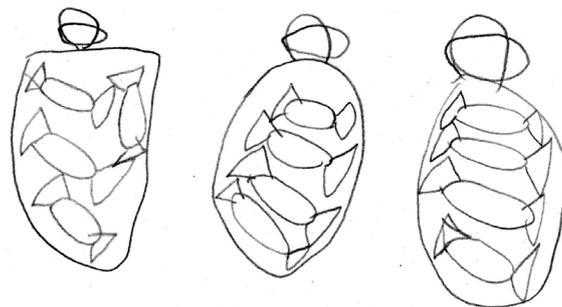
Problema 3

$$4 + 4 + 4 = 12$$

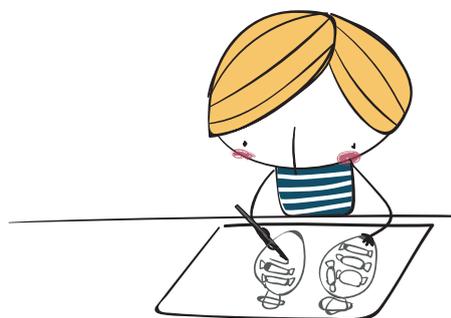


Spiegazione dell'allievo: "3 volte 4 fa 12, se facciamo il calcolo! 4+4+4 fa 12".

Problema 3

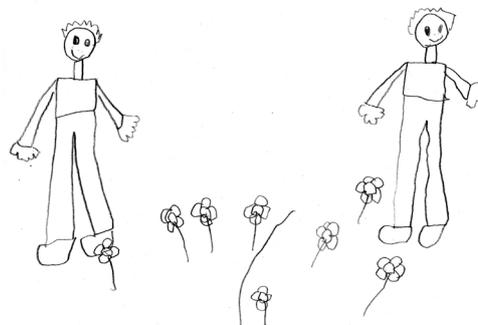


Strategia dell'allievo: Conta con le dita e scopre che sono 12.



Nel caso invece della divisione a metà, una strategia vincente si basa sulla scomposizione del numero dato in due addendi uguali (ad esempio, 8 come  $4 + 4$ ). Da molti bambini questa scomposizione può essere sfruttata efficacemente in rappresentazioni pittoriche, in cui gli elementi della collezione vengono graficamente suddivisi a metà in due gruppi della stessa numerosità, anche con scomposizioni ulteriori di ciascuna metà in modi differenti (ad esempio, 8 come  $[2 + 2] + [3 + 1]$ ).

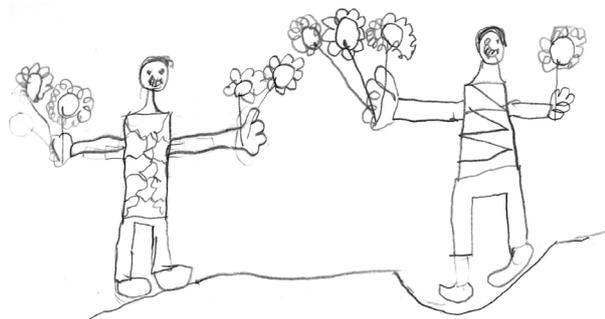
Problema 4



Spiegazione dell'allievo: "Allora, (indica il foglio) devo disegnare una metà qua e una metà qua". Disegna 8 fiori, conta e dice: "Ne regala 4 e ne rimane a lui 4!". Traccia una linea.



Problema 4



Spiegazione dell'allievo: "4 + 4 fa 8". Disegna i due bambini ognuno con 4 fiori. Mentre esegue il disegno commenta: "A Sergio metto 2 fiori da un a parte e due dall'altra; a Leonardo disegno 3 fiori in una mano e uno nell'altra".

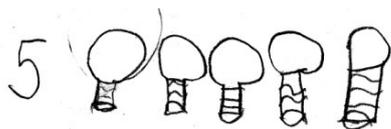
Occorre tener presente inoltre che, di fronte a problemi diversi, lo stesso allievo può far uso di diverse modalità di rappresentazione; a titolo d'esempio, si riportano di seguito le strategie rappresentative che uno stesso bambino utilizza per gestire le operazioni via via più complesse, nei quattro problemi proposti.

Problema 1

$$6 + 2 = 8$$

Rappresentazione aritmetica

Problema 2



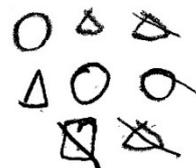
Rappresentazione mista aritmetico-pittorica

Problema 3



Rappresentazione mista aritmetico-pittorica

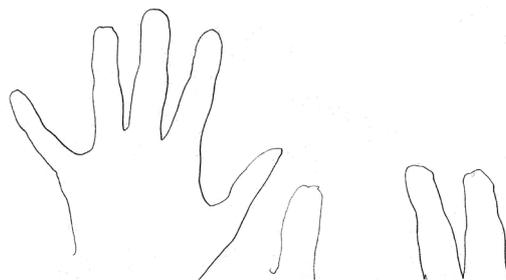
Problema 4



Rappresentazione pittorica

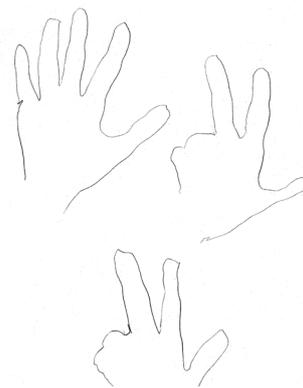
È interessante osservare come alcuni bambini, come l'allieva dell'esempio sottostante, prediligono sfruttare uno stesso strumento, in questo caso le dita delle mani, per affrontare ogni tipo di situazione, ma possono incappare in casi in cui la loro strategia non funziona (nell'esempio, si tratta del Problema 4).

Problema 1



L'allieva disegna il 6 ricalcando la mano aperta e poi ripassa un pollice; poi ripassa altre 2 dita e esclama: "Sono 8!"

Problema 2



L'allieva disegna le 8 dita ricalcando la mano aperta e poi ripassando ancora tre dita; disegna poi una mano aperta con le 5 dita spiegando che a Viola rimangono 5 palloncini.



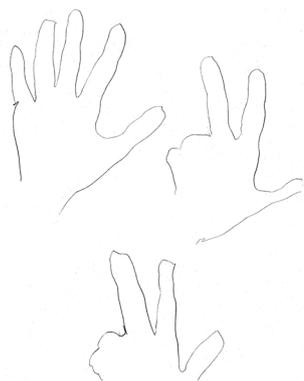
*Problema 3*



Spiegazione dell'allieva: "Ho tenuto le quattro dita (*le mostra*) e poi ho contato (*utilizza le quattro dita*):

- 1, 2, 3, 4
- 5, 6, 7, 8
- 9, 10, 11, 12".

*Problema 4*



L'allieva apre le due mani: con la destra mostra le 5 dita e con la sinistra tre dita. Dice: "Ho pensato che una è la metà e l'altra mano l'altra metà".

## DALLE RAPPRESENTAZIONI SPONTANEE A QUELLE FORMALI

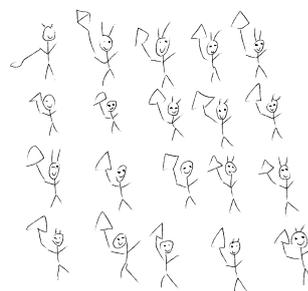
Un lavoro approfondito sulle rappresentazioni spontanee e, attraverso queste, sui modelli delle diverse operazioni prepara il terreno alla successiva e graduale introduzione dei formalismi. I segni =, +, -, ×, : verranno introdotti come possibili rappresentazioni, quelle convenzionali, che permettono di contrarre al massimo la scrittura, perdendo però componenti semantiche del discorso. Il simbolismo nasce come un'esigenza e acquisisce senso grazie al dialogo con una vasta varietà di linguaggi possibili che devono rima-

nere sempre a disposizione degli allievi, per permettere da parte loro una scelta consapevole, idonea e funzionale alle diverse richieste poste.

Fin dal primo ciclo, è interessante e opportuno proporre delle situazioni che coinvolgano la moltiplicazione, che i bambini affrontano spontaneamente come addizione ripetuta ( $4 + 4 + 4$  o "3 volte 4"), e la divisione, almeno nel suo più intuitivo modello di suddivisione o di distribuzione equa. L'approccio che abbiamo illustrato in questa proposta per le quattro operazioni fondamentali, infatti, è valido in generale, prima di introdurre formalmente un qualsiasi concetto matematico nuovo. Risulta sempre didatticamente utile ed efficace far emergere le rappresentazioni spontanee che l'allievo crea relativamente a quel concetto, e partire da esse per costruire delle rappresentazioni via via più formali e convenzionali.

A titolo d'esempio, consideriamo quattro problemi proposti ad allievi di una seconda elementare con la richiesta di risolverli per iscritto su un foglio bianco. Si tratta di problemi incentrati in particolare su diversi significati della moltiplicazione, intesa come addizione ripetuta o schieramento (*Problema 5*) e come combinazione (*Problema 6*), e della divisione, per ripartizione equa (*Problema 7*) e per contenenza (*Problema 8*). Riportiamo di seguito i testi, così come sono stati proposti agli allievi, e per ciascuno di essi mostriamo alcune rappresentazioni del processo risolutivo seguito da diversi bambini, al fine di fornire alcuni esempi di possibili strategie che in alcuni casi hanno portato al risultato corretto, in altri no.

- *Problema 5*: Sul pavimento ci sono 4 file, ciascuna delle quali contiene 5 soldatini. Quanti soldatini ci sono in tutto?



$$4 \times 5 = 20$$

CI SONO 20 SOLDATINI  
IN TUTTO

Rappresentazione pittorico-aritmetico-linguistica





Rappresentazione iconico-aritmetica

$$5 + 4 = 9$$

In tutto le file di soldati sono 9

Rappresentazione aritmetico-linguistica

$$5 + 5 = 10 \quad 10 + 5 = 15 \quad 15 + 5 = 20$$

In tutto ci sono 20 soldatini.

Rappresentazione aritmetico-linguistica

- **Problema 6:** Giada ha 4 gonne e 3 magliette e vuol vestirsi ogni giorno in modo diverso, combinando sempre gonne con magliette diverse. Per quanti giorni le riesce questo gioco di accostamenti diversi?



può vestirsi in 7 modi diversi

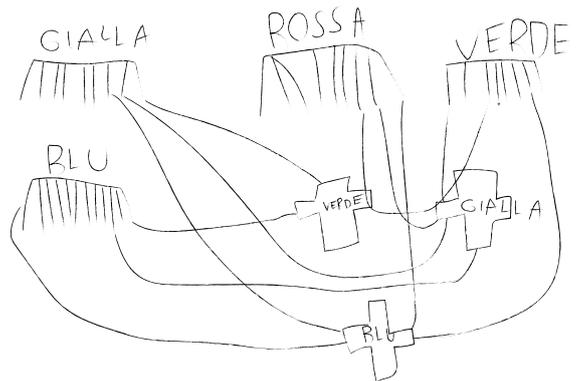
Spiegazione dell'allievo: "Ho messo insieme il 4 e il 3".

Rappresentazione pittorico-aritmetico-linguistica

$$4 + 3 = 7$$

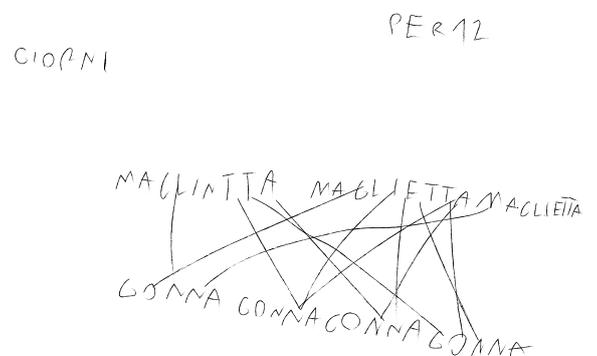
Giada riesce a fare 7 cambiamenti.

Rappresentazione aritmetico-linguistica



$$4 + 4 = 8 + 4 = 12$$

Rappresentazione pittorico-aritmetico-linguistica

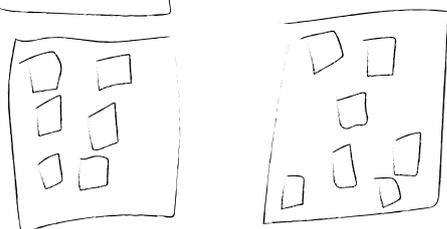
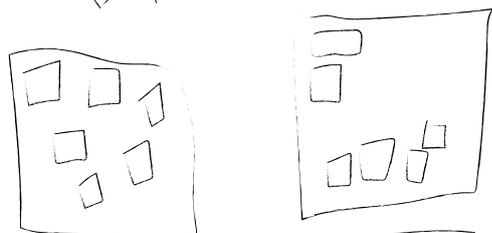
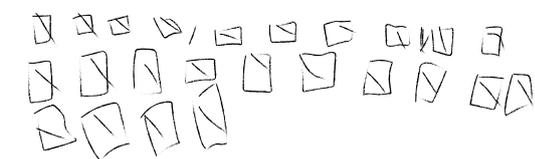


Spiegazione dell'allievo: "Ho contato le righe. Ogni giorno è una riga".

Rappresentazione linguistico-aritmetica

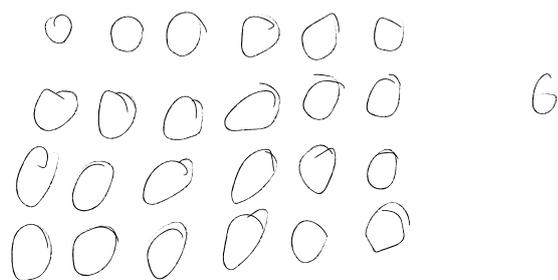


- **Problema 7:** Daniele deve riporre i suoi 24 libri di calcio in 4 scatole, in modo tale che in ogni scatola ci sia lo stesso numero di libri. Quanti libri metterà in ogni scatola?



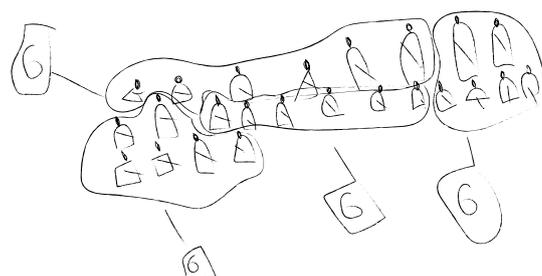
3 SCATOLE DA 6  
1 SCATOLA DA 7.

Rappresentazione pittorico-linguistico-aritmetica



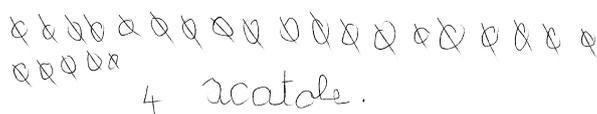
Rappresentazione iconico-aritmetica

- **Problema 8:** Leonardo vuole dividere i suoi 24 berretti sportivi in scatole, in modo che in ciascuna ce ne stiano 6. Quante scatole gli servono?



LEONARDO A  
BISOGNO DI 4  
SCATOLE

Rappresentazione pittorico-linguistico-aritmetica



Rappresentazione iconico-aritmetico-linguistica

$$24 \div 6 = 4$$

4 scatole

Rappresentazione aritmetico-linguistica

È interessante notare come gli allievi ricorrano a tutti i tipi di rappresentazioni (pittorica, iconica, linguistica, simbolica/aritmetica), rendendo visibili i modelli mentali soggiacenti alle operazioni coinvolte. Anche se tali operazioni saranno formalmente introdotte solo nel secondo ciclo, questo lavoro di esplicitazione delle strategie spontanee, arricchito da esperienze laboratoriali da far vivere concretamente agli allievi, manipolando oggetti reali, permette di arrivarci con una base più solida, ricca e consapevole.





## TRAGUARDI DI COMPETENZA PREVALENTI

L'allievo:

- conosce e utilizza i numeri naturali almeno fino a 100 in contesti legati principalmente al quotidiano e sa effettuare ordinamenti, stime, conteggi di raccolte alla sua portata numerica;
- esegue calcoli mentali e mentali-scritti che coinvolgono addizioni almeno fino a 100 e sottrazioni in casi più semplici;
- esplora, comprende, prova e risolve situazioni-problema contestualizzate legate al vissuto e alla realtà che coinvolgono i primi apprendimenti in ambito numerico, geometrico e relativi a grandezze riferite alla sua quotidianità;
- progetta e realizza rappresentazioni e modelli non formalizzati legati all'interpretazione matematica del mondo che lo circonda;
- presenta, descrive e motiva le proprie scelte prese per affrontare una semplice situazione matematica legata alla realtà in modo tale che risultino comprensibili ai compagni, come pure comprende le descrizioni e presentazioni degli altri;
- manifesta un atteggiamento positivo rispetto all'apprendimento quando si affrontano esperienze relative alla matematica.

## COLLEGAMENTI CON ALTRE DISCIPLINE



Area lingue

## COMPETENZE TRASVERSALI

- Pensiero riflessivo e critico (analisi/comprendimento, ricerca delle connessioni, interpretazione/giudizio, considerazione risorse e vincoli, riconoscimento diversi punti di vista).
- Pensiero creativo e problem solving (messa a fuoco del problema, formulazione di ipotesi, attivazione strategie risolutive, autoregolazione, atteggiamento positivo, sensibilità al contesto).

