DIVERSE MODALITÀ DI PRESENTARE E RISOLVERE UN PROBLEMA

Ambiti disciplinari: Numeri e calcolo; Geometria; Grandezze e misure.

Apprendere diverse modalità di risoluzione di problemi.
Sviluppare un atteggiamento positivo nei confronti dei problemi.

Operazioni in generale; figure dello spazio; figure del piano in generale; lunghezza in generale; relazioni tra perimetro e area di figure; volume e capacità in generale; tempo in generale; valore monetario; conversioni di unità di misura convenzionali.

Risolvere problemi è una delle attività più tipiche della matematica; in questo documento si propongono diverse modalità di presentarli e risolverli. Alternando le varie proposte MaMa relative alle diverse tipologie e approcci di problemi viene favorito l'ampliamento del bagaglio di esperienze e di competenze degli allievi importanti per affrontare un problema di matematica (ma non solo), acquisendo così sicurezza e consapevolezza sui processi da attivare.

DIVERSE MODALITÀ DI RISOLUZIONE DI PROBLEMI

La maggior parte dei problemi scolastici rientra nella categoria dei problemi verbali che si presentano come testi scritti con un enunciato e una o più domande. Agli allievi è solitamente chiesto di leggere il testo e poi di risolvere il problema mediante procedure scritte. Tuttavia, anche le modalità con cui vengono presentati e affrontati i problemi possono essere varie e cambiare a seconda delle competenze dei bambini.

Soprattutto nei primi mesi di scuola, quando i bambini stanno ancora imparando a leggere, ma anche nel seguito, si possono proporre problemi oralmente, attraverso la lettura di un brano o il racconto di un'esperienza. Ai bambini si può chiedere di risolvere un problema senza avere a disposizione l'enunciato scritto, confrontandosi con i compagni sulla base di quanto ricordano o facendo ulteriori domande al docente. Oltre alla presentazione, anche la risoluzione può essere solo orale.

Un'altra modalità per affrontare un problema può essere quella di drammatizzarlo, chiedendo ai bambini di riprodurre la situazione problematica interpretando i personaggi del testo. Attraverso l'immedesimazione nei personaggi i bambini vengono coinvolti attivamente sia nella riformulazione del problema, sia nel processo di risoluzione.

I problemi sulla compravendita possono essere interpretati trasformandosi in clienti e venditori; i problemi sulle tassellazioni possono essere risolti trasformandosi in piastrellisti o decoratori; i problemi sulla lunghezza possono essere affrontati come architetti e muratori ecc.

Fa finta di essere…

Una strategia vincente per tutti i cicli scolastici, adatta per far emergere i modelli intuitivi posseduti dagli allievi, consiste nel proporre un problema nella formulazione "Fa finta di essere…". Con questi problemi l'allievo cerca di immedesimarsi nei panni del protagonista del problema (maestra, allievo più piccolo o più grande ecc.), innescando così l'esigenza di utilizzare un linguaggio e le strategie risolutive adeguate alla situazione. Utilizzando questa modalità spesso i bambini si sentono più liberi di ricorrere al linguaggio naturale e di utilizzare una strategia adatta al personaggio coinvolto. Dall'analisi delle risposte degli allievi i docenti possono cogliere maggiormente quali siano le strategie spontanee utilizzate, le conoscenze e le procedure possedute e quali le eventuali difficoltà. Questo tipo di attività può aiutare gli allievi a traslare le conoscenze matematiche anche all'esterno del contesto scolastico e allo stesso tempo far ricorso alle loro esperienze extra scolastiche per risolvere problemi matematici.

Esempi di problemi "Fa finta di essere…"

Fa finta di essere un barista. Un cliente ordina un caffè che costa 2 franchi e un succo che costa 4 franchi. Ti paga con 5 franchi. Tu cosa fai?

Fa finta di essere un piastrellista. Devi piastrellare una stanza rettangolare di dimensioni 4 metri per 3,5 metri. Al negozio vendono delle piastrelle quadrate di lato 50 cm. Le piastrelle vengono vendute a pacchi da 25. Tu cosa fai?

Fa finta di essere un maestro. Vuoi spiegare ai tuoi allievi di III elementare perché l'area del triangolo si trova moltiplicando la misura di un lato per quella della relativa altezza e dividendo il prodotto per due. Come lo spiegheresti?

Fa finta di essere un papà (o una mamma). Il tuo bimbo, che ha 7 anni, ha sentito dire che ogni triangolo ha tre altezze e ti chiede cosa voglia dire. Quale risposta daresti?

Esercizi anticipati

La risoluzione dei problemi coinvolge attività creative di riorganizzazione del proprio sapere e delle proprie abilità per individuare nuove strategie, e dunque nuovo apprendimento, mentre lo svolgimento di un esercizio mobilita saperi e abilità già acquisite. Un testo che rappresenta un esercizio standard per una determinata classe, e che di solito viene proposto per consolidare conoscenze già apprese, può essere consegnato in una classe precedente come occasione per mobilitare nuove abilità e acquisire nuove conoscenze, purché il testo sia comprensibile agli allievi (non devono dunque esserci termini o simboli ancora non noti). In questo caso stiamo parlando di "esercizi anticipati". Per risultare efficace nello sviluppo di nuove competenze, un esercizio anticipato deve riguardare argomenti non ancora noti agli allievi, ma non troppo distanti rispetto alle loro attuali capacità. Gli esercizi anticipati possono essere proposti come lavori a coppie o a piccoli gruppi, in modo che gli allievi possano condividere il loro sapere e aiutarsi a vicenda nella risoluzione.

Vista la difficoltà degli argomenti affrontati è importante che gli allievi siano motivati ad affrontare il problema, si sentano liberi di esplorare diverse strategie e non siano penalizzati da eventuali errori. L'insegnante può porre l'attenzione prevalentemente sui processi attuati dai bambini, sulla condivisione di strategie e approcci e sulle idee che l'esercizio ha fatto scaturire, piuttosto che sul risultato del problema

Esempi di esercizi anticipati

Andrea riceve tre macchinine in regalo dalla nonna e cinque macchinine in regalo dal nonno. Quante sono le macchinine di Andrea?

▼▼▼

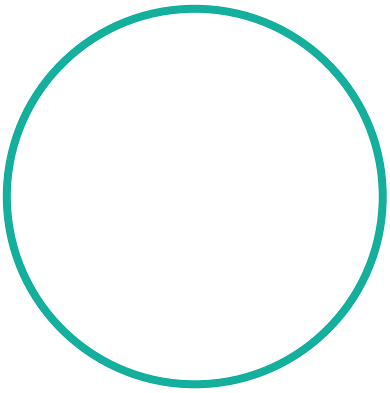
Questo testo può essere considerato un esercizio anticipato se proposto nella scuola dell'infanzia o nei primi mesi di prima elementare, quando ancora non è stata introdotta l'addizione.

Una lavatrice che costa 1'000 franchi è in vendita con il 25% di sconto, cioè ogni 100 franchi, 25 franchi vengono risparmiati. Quanto si deve pagare per acquistare la lavatrice?

▼▼▼

Questo problema può essere proposto come esercizio anticipato fin dalla terza elementare. Gli allievi possono adottare diverse strategie per risolvere il problema, anche senza conoscere le percentuali.

Quanti cm è lungo il contorno di questa figura?



▼▼▼

Questo esercizio standard per allievi di scuola media, che conoscono la formula per ricavare la lunghezza della circonferenza, può essere posto come esercizio anticipato già con allievi del secondo ciclo. Togliendo il riferimento ai cm e lasciando libertà agli allievi è possibile chiedere quanto è lungo il contorno di una circonferenza fin dalla prima elementare. I bambini proporranno diverse strategie per rispondere alla domanda: far aderire un laccetto delle scarpe al contorno, affiancare dei tappi di pennarelli, delle penne, delle gomme lungo tutto il contorno ecc.

Riconoscere analogie

La nostra mente, anche inconsapevolmente, fa ricorso al pensiero analogico facendo riferimento a esperienze precedenti e a immagini consolidate durante i processi di scoperta.

L'analogia permette di trasferire la conoscenza da un caso specifico ad altri. Allo stesso tempo però utilizzare analogie può portare anche a conclusioni erronee, che devono essere individuate.

Nell'affrontare problemi di matematica è importante saper utilizzare analogie in modo critico, sfruttando entrambi gli aspetti citati in precedenza: riconoscere la validità di regole, proprietà, relazioni e strategie già apprese per aiutare il processo risolutivo e saper individuare quando queste non sono più valide ed è necessario trovarne di nuove.

In classe si può lavorare esplicitamente sul pensiero analogico, proponendo ad esempio due o più problemi contemporaneamente, con l'esplicita richiesta di confrontarli per trovare quali siano gli elementi in comune e quali le differenze.

Ad esempio, si possono proporre problemi che hanno la stessa struttura e lo stesso processo risolutivo coinvolto, ma contesti diversi, o viceversa, o ancora problemi con lo stesso contesto ma dati riferiti a insiemi numerici diversi, pur coinvolgendo lo stesso processo risolutivo. Da questo punto di vista ci si può sbizzarrire con creatività.

L'attività di confronto aiuta gli allievi a sviluppare le capacità di riflettere sul proprio lavoro e sull'individuare connessioni tra le situazioni nuove e quelle già affrontate. È importante che facendo ricorso all'analogia si vada oltre l'intuizione e si chieda anche un processo di verifica delle ipotesi fatte.

Esempi di problemi in cui sono presenti analogie

Lucia ha preparato 2,5 kg di marmellata che vuole dividere in barattoli da 250 g. Di quanti barattoli avrà bisogno?

Simona sta preparando le indicazioni per la gara campestre della scuola. Il percorso è lungo 2,5 km e le è stato detto di mettere un paletto di segnalazione ogni 250 metri. Quanti paletti deve preparare?

▼▼▼

Questi due problemi possono essere proposti ai bambini contemporaneamente per evidenziare che il processo risolutivo è lo stesso, dal punto di vista aritmetico.

Claudio ha speso 5 franchi per acquistare delle caramelle. Nel borsellino gli restano 3 franchi. Quanti franchi aveva prima?

Giovanni aveva 5 franchi nel borsellino, ha acquistato delle caramelle e ora gli restano 3 franchi. Quanti soldi ha speso per acquistare le caramelle?

▼▼▼

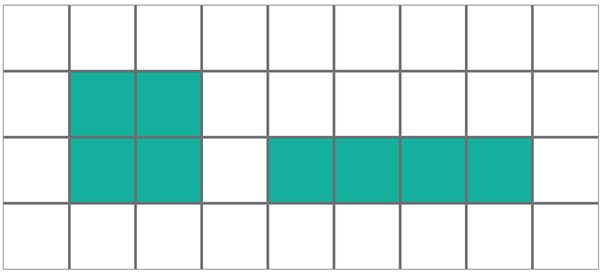
Questi due problemi hanno gli stessi dati numerici e parole simili (in entrambi c'è l'espressione "restano 3 franchi") ma il primo si risolve con un'addizione, mentre il secondo con una sottrazione.

Ricordandoti quali sono gli sviluppi del cubo, prova a disegnare tutti gli sviluppi di un parallelepipedo di dimensioni 3 cm, 4 cm, 5 cm.

▼▼▼

Nel testo di questo problema c'è un esplicito riferimento ad una situazione analoga da richiamare alla mente per risolvere l'esercizio.

Queste due figure hanno la stessa area, ma perimetro diverso:



Secondo te, esistono delle figure che abbiano lo stesso perimetro ma area diversa? Prova a disegnarle.

▼▼▼

I temi dell'isoperimetria e dell'equiestensione delle figure piane possono essere affrontati in parallelo per permettere ai bambini di costruire esempi e verificare che non esiste nessun tipo di relazione reciproca tra aree e perimetri di figure diverse.

Tra tutti i triangoli con lo stesso perimetro quello di area massima è il triangolo equilatero.

Tra tutti i quadrilateri con lo stesso perimetro secondo te qual è quello di area massima?

▼▼▼

Portando l'esempio dei triangoli isoperimetrici, si indaga se i bambini arrivano per analogia a ipotizzare, e poi a verificare, che anche per i quadrilateri, la figura di area massima a parità di perimetro è il quadrilatero regolare, ossia il quadrato.

Le diagonali di un quadrato sono perpendicolari tra loro.

Due delle quattro diagonali di un cubo sono anch'esse perpendicolari tra loro?

▼▼▼

Con questo esempio, che può essere verificato concretamente costruendo lo scheletrato di un cubo, si vogliono mettere in guardia gli allievi del fatto che occorra sempre verificare le ipotesi che possono essere fatte per analogia, per poter confermare o confutare una congettura: in questo caso, infatti, si può verificare che due diagonali del cubo non sono tra loro perpendicolari.

Dati coperti

Un metodo per riflettere sul processo risolutivo e sulle richieste fatte dal problema, piuttosto che sui dati numerici presenti nel testo, è quello di nascondere questi ultimi. Coprendo i dati (ad esempio con delle macchie di colore o con dei cartoncini) i bambini sono portati a riflettere maggiormente sull'enunciato e sul procedimento che occorre attuare, invece di concentrarsi sui numeri presenti nel testo provando a combinarli tra loro.

Spesso i numeri presenti nel testo di un problema possono infatti ingannare sulla scelta della procedura risolutiva, facendo sì che i bambini ricorrano a modelli intuitivi errati (come ad esempio dividere sempre il numero maggiore per il minore, scegliere la moltiplicazione se si pensa che il risultato debba essere maggiore di ciascuno dei due fattori, e la divisione se si pensa che il risultato debba essere minore del dividendo).

Esempi di problemi in cui è efficace la tecnica di coprire i dati

Coprendo i dati:

a. Una bottiglia da [redacted] litri di vino costa [redacted] franchi. Qual è il prezzo di un litro?

b. Una bottiglia da [redacted] litri di acqua costa [redacted] franco. Qual è il prezzo di un litro?

c. Una bottiglia da [redacted] litri di gazzosa costa [redacted] franchi. Qual è il prezzo di un litro?

Dopo aver scoperto i dati:

a. Una bottiglia da 2 litri di vino costa 6 franchi. Qual è il prezzo di 1 litro?

b. Una bottiglia da 2 litri di acqua costa 1 franco. Qual è il prezzo di 1 litro?

c. Una bottiglia da 0,75 litri di gazzosa costa 2 franchi. Qual è il prezzo di 1 litro?

▼▼▼

La tecnica di coprire i dati numerici relativi alla capacità e al prezzo della bottiglia permette di mostrare l'analogia tra i tre problemi che presentano la stessa struttura e si risolvono allo stesso modo: dividendo il costo della bottiglia per i litri indicati.

Dopo aver stabilito il procedimento risolutivo per i tre problemi e aver scoperto i dati, diversi allievi ritrattano la scelta. Per il primo problema è intuitivo fare 6 : 2, ma quando gli allievi scoprono i numeri del secondo problema tendono a negare l'analogia e a voler dividere il numero maggiore per il numero minore (2 : 1 invece di 1 : 2), cercando così l'operazione più "facile", invece del procedimento corretto. Nel terzo problema fare direttamente 2 : 0,75 risulta molto coraggioso, diversi allievi ritrattano trasformando 0,75 nella frazione 3/4, più rassicurante in questo caso, mentre allievi di scuola media cercheranno di applicare una proporzione.

Coprendo i dati:

Marco ha ricevuto una tessera omaggio che gli permette di fare [redacted] giri gratuiti sulle giostre. Ogni giro aggiuntivo dovrà pagarlo 2 franchi. Marco vuole fare [redacted] giri, quanto dovrà pagare?

Dopo aver scoperto i dati:

a. Marco ha ricevuto una tessera omaggio che gli permette di fare 10 giri gratuiti sulle giostre. Ogni giro aggiuntivo dovrà pagarlo 2 franchi. Marco vuole fare 8 giri, quanto dovrà pagare?

b. Marco ha ricevuto una tessera omaggio che gli permette di fare 10 giri gratuiti sulle giostre. Ogni giro aggiuntivo dovrà pagarlo 2 franchi. Marco vuole fare 12 giri, quanto dovrà pagare?

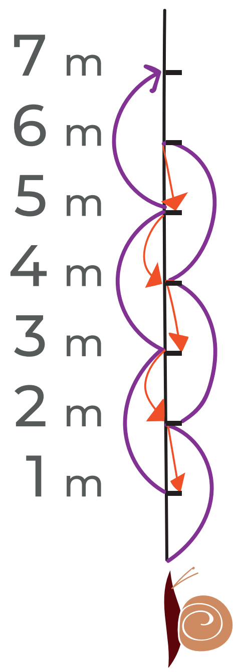
▾▾▾

Nel caso in cui il numero di giri fatti da Marco sia minore del numero di giri gratuiti (caso a), Marco non dovrà pagare niente. Altrimenti (caso b) bisogna calcolare la differenza tra i giri fatti da Marco e quelli omaggio e moltiplicare per due. Il primo caso viene spesso trascurato dai bambini che sottraggono il numero maggiore dal numero minore, senza verificare se si tratta di giri effettuati o giri omaggio.

Risolvere con i disegni

Il disegno può essere un valido strumento di rappresentazione per le risoluzioni di problemi sia geometrici, sia aritmetici, ma soprattutto quando il disegno è libero, ossia voluto dall'allievo stesso e non imposto. Ciò avviene soprattutto quando la risoluzione di un problema tramite un disegno risulta addirittura più efficace rispetto ad altre strategie, anche quella aritmetica, come avviene ad esempio per il seguente famoso problema: "Una lumaca sale su un muro alto 7 metri. Durante il giorno sale di 2 metri, ma durante la notte scende di 1 metro. Continua sempre a salire e scendere in questo modo. Dopo quanto tempo la lumaca raggiungerà la cima del muro?". Una risposta comune a questo problema è "7 giorni", ottenuta calcolando che ogni giorno, inteso come ventiquattro ore, la lumaca sale di 1 metro (sottraendo i metri scesi la notte a quelli saliti di giorno). La risposta corretta invece è "6 giorni", in quanto il quinto giorno la lumaca si troverà a 5 metri, percorrendo 2 metri durante il sesto giorno arriverà in cima.

6 GIORNI



Confrontare le soluzioni

Un altro approccio per affrontare i problemi, in particolare i processi di risoluzione, è quello di fornire agli allievi un problema insieme a diverse risoluzioni, alcune delle quali corrette e altre scorrette. Questa strategia risulta più efficace e coinvolgente per gli allievi se le soluzioni messe a confronto sono state realmente ottenute da alunni di altre classi o da loro stessi. Si chiede quindi agli allievi di individuare quale o quali procedimenti siano corretti e quali non lo sono, riportando le motivazioni. In questo modo gli allievi possono riflettere sui vari procedimenti risolutivi, hanno l'occasione di imparare a individuare ed eventualmente a correggere gli errori (propri e altrui), oltre che a individuare quali possono essere i diversi approcci per risolvere, correttamente, lo stesso problema. L'insegnante può proporre diversi procedimenti e tra questi scegliere anche quelli che ritiene possano contenere gli errori più frequenti o le procedure su cui è importante porre l'attenzione della classe.

Esempi di problemi con confronto di procedimenti risolutivi

La raccolta differenziata

Martina è molto sensibile alle problematicheambientali e si impegna moltissimo nella raccolta differenziata dei rifiuti, in particolare nella raccolta di bottiglie di plastica: ha scoperto che con 27 bottiglie di plastica si può fare una caldissima felpa in pile.

Martina vorrebbe raccogliere tante bottiglie, quante ne serviranno per avere una felpa per lei e per ogni suo compagno di classe. La classe di Martina è composta da 18 alunni.

Ad oggi, Martina ha raccolto 285 bottiglie. Quante bottiglie di plastica deve aggiungere per avere in cambio le felpe per tutti?

Ecco le risposte date da quattro alunni:

- **Soluzione di Daniela**
  285 : 18 = 15,83333... quasi 16 bottiglie per ogni alunno.
  27 – 16 = 11
  11 × 18 = 198
  Martina deve aggiungere 198 bottiglie di plastica per avere le felpe in pile per tutti.

- **Soluzione di Mirco**
  27 × 18 = 486
  486 – 285 = 201
  Martina deve aggiungere 201 bottiglie di plastica per avere le felpe in pile per tutti.

- **Soluzione di Marica**
  18 × 27 = 486
  486 – 285 = 209
  Martina deve aggiungere 209 bottiglie di plastica per avere le felpe in pile per tutti.

- **Soluzione di Danilo**
  27 × 18 = 243
  285 – 243 = 42
  Martina deve aggiungere 42 bottiglie di plastica per avere le felpe in pile per tutti.

Secondo te chi ha ragione? Perché?
Spiega il tuo ragionamento.

TRAGUARDI DI COMPETENZA PREVALENTI (I CICLO)

L'allievo:

- esegue calcoli mentali e mentali-scritti che coinvolgono addizioni almeno fino al 100 e sottrazioni in casi più semplici;
- esplora, comprende, prova e risolve situazioni-problema contestualizzate legate al vissuto e alla realtà che coinvolgono i primi apprendimenti in ambito numerico, geometrico e relativi a grandezze riferite alla sua quotidianità;
- progetta e realizza rappresentazioni e modelli non formalizzati legati all'interpretazione matematica del mondo che lo circonda;
- presenta, descrive e motiva le proprie scelte prese per affrontare una semplice situazione matematica legata alla realtà in modo tale che risultino comprensibili ai compagni, come pure comprende le descrizioni e presentazioni degli altri.

TRAGUARDI DI COMPETENZA PREVALENTI (II CICLO)

L'allievo:

- esegue con sicurezza il calcolo mentale e mentale-scritto che coinvolge le quattro operazioni con numeri naturali e sa effettuare calcoli con numeri decimali, eventualmente anche ricorrendo a una calcolatrice in situazioni che lo richiedono;
- comprende e risolve con fiducia e determinazione situazioni-problema in tutti gli ambiti di contenuto previsti per questo ciclo, legate al concreto o astratte ma partendo da situazioni reali, mantenendo il controllo critico sia sui processi risolutivi sia sui risultati, esplorando e provando diverse strade risolutive;
- costruisce ragionamenti, fondandosi su ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista di altri;
- legge e comprende testi che coinvolgono aspetti logici e matematici concernenti gli ambiti coinvolti in questo ciclo;
- progetta e realizza rappresentazioni e modelli di vario tipo, matematizzando e modellizzando situazioni reali impregnate di senso;
- comunica e argomenta procedimenti e soluzioni relative a una situazione, utilizzando diversi registri di rappresentazione semiotica; comprende, valuta e prende in considerazione la bontà di argomentazioni legate a scelte o processi risolutivi diversi dai propri.

COLLEGAMENTI CON ALTRE DISCIPLINE

Area lingue

COMPETENZE TRASVERSALI

- Sviluppo personale (messa a fuoco degli scopi, attivazione di strategie d'azione).
- Collaborazione (condivisione scopi, organizzazione del lavoro cooperativo, co-elaborazione, monitoraggio e regolazione).
- Comunicazione (identificazione scopo e destinatario, ideazione-pianificazione, elaborazione, revisione, atteggiamento comunicativo).
- Pensiero riflessivo e critico (analisi/comprensione, ricerca delle connessioni, interpretazione/giudizio, considerazione risorse e vincoli, riconoscimento diversi punti di vista).
- Pensiero creativo e problem solving (messa a fuoco del problema, formulazione di ipotesi, attivazione strategie risolutive, autoregolazione).
- Strategie di apprendimento (recupero del sapere pregresso, organizzazione del contesto di apprendimento).