ESPERIENZE DI COMBINATORIA ALLA SCUOLA ELEMENTARE

Ambiti disciplinari: Numeri e calcolo; Geometria.

Affrontare situazioni di combinatoria relative a un insieme di elementi.

Conteggio in generale; operazioni in generale; grafici e tabelle; combinatoria e probabilità; percorsi, plastici e mappe; figure dello spazio; figure del piano in generale.

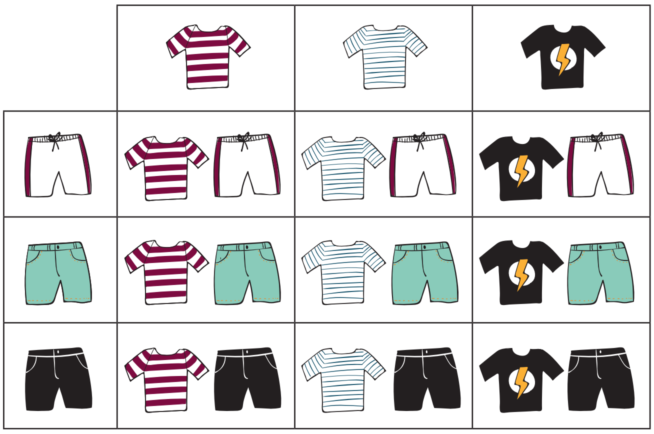
Questa pratica offre diversi spunti per avvicinare gli allievi al tema del calcolo combinatorio. Vengono presentati giochi, situazioni concrete e problemi di enumerazione, e più in generale di conteggio, che possono essere proposti tramite diverse modalità (con testi scritti o disegni, oralmente, proiettando video, utilizzando materiale concreto ecc.) e risolti in vari modi (drammatizzati, per essere vissuti in prima persona, rappresentati in diverse forme e con vari materiali ecc.). È importante, soprattutto per gli allievi più piccoli, che ci sia la possibilità di manipolare dei materiali e di vivere in prima persona la situazione. L'obiettivo è quello di condurre gradualmente gli allievi ad affrontare situazioni sempre più astratte, allenando la verbalizzazione di strategie e avendo la possibilità di verificare le proprie ipotesi tramite prove empiriche.

Alcune proposte mettono in evidenza il legame tra combinatoria e probabilità, sfruttando la prima per contare tutti i casi possibili in una data situazione di incertezza, con il fine di valutare i casi favorevoli al verificarsi di un certo evento.

Il pensiero riflessivo e critico, così come quello creativo, vengono stimolati da tali proposte in cui gli allievi mettono in atto, condividono, validano e apprendono vere e proprie strategie di problem solving.

In quanti modi mi posso vestire?

Questa situazione riguarda gli abbinamenti possibili di capi d'abbigliamento, al fine di creare look ogni volta diversi. Immaginiamo per esempio di avere a disposizione 3 diverse magliette e 3 diversi tipi di pantaloni, e di volerci vestire ogni giorno in maniera differente. Dopo quanti giorni saranno esaurite tutte le possibilità e si dovrà per forza scegliere una combinazione di abiti che è già stata indossata in precedenza? Per esplorare il problema, può essere utile creare una tabella a doppia entrata come quella proposta qui di seguito per riuscire a visualizzare e a contare tutti i 9 casi possibili.



Una volta che gli allievi hanno familiarizzato con strumenti di esplorazione come questo, è possibile rendere l'attività più complessa, ad esempio aumentando il numero di capi a disposizione (ad esempio, con 5 magliette e 6 paia di pantaloni si arriva a 5 × 6 = 30 combinazioni possibili), allenando così un'importante interpretazione della moltiplicazione. Con allievi più grandi, richiedendo uno sforzo maggiore di astrazione, sarà possibile anche aumentare il tipo di capi da considerare; ad esempio, oltre a 3 magliette e a 3 paia di pantaloni, mettere a disposizione anche 2 diversi tipi di scarpe. In questo caso, i bambini potrebbero esplorare il problema creando con delle sigle le diverse combinazioni possibili, mantenendo fissa ogni volta una variabile diversa.

Supponiamo che i capi di abbigliamento siano indicati come di seguito:

- maglietta rossa (M), maglietta blu (M), maglietta verde (M);
- pantaloni a pois (P•), pantaloni a righe (P/), pantaloni a quadretti (P▪);
- scarpe da ginnastica (Sg), scarpe a infradito (Si).

Tutti i casi possibili (3 × 3 × 2 = 18) potranno essere così listati:

M P• Sg	M P• Sg	M P• Sg
M P• Si	M P• Si	M P• Si
M P/ Sg	M P/ Sg	M P/ Sg
M P/ Si	M P/ Si	M P/ Si
M P▪ Sg	M P▪ Sg	M P▪ Sg
M P▪ Si	M P▪ Si	M P▪ Si

Vari gusti di gelato

In questa situazione gli allievi assumono il ruolo di gelatai alle prese con coni dai gusti diversi. Si immagina quindi di avere a disposizione delle vaschette di gelato alla vaniglia, al pistacchio e al cioccolato. Quanti coni diversi è possibile realizzare mettendo una sola pallina di gelato su ognuno? Quanti coni diversi è possibile realizzare, invece, mettendo su ognuno due palline? E quanti coni, invece, con tre palline? Rispetto alla situazione precedente gli allievi devono considerare anche l'eventualità che lo stesso gusto venga ripetuto più di una volta (un cono può essere formato con tre palline alla vaniglia, oppure con due palline alla vaniglia e una al cioccolato, e così via).

- Con una sola pallina, è possibile creare 3 gelati, uno per ogni gusto disponibile (vaniglia = V, pistacchio = P, cioccolato = C).
- Con due palline, è possibile creare 6 gelati diversi, considerando i 3 che presentano due palline con lo stesso gusto (VV, PP, CC), e i 3 che presentano gusti diversi (VP, VC, PC). In questo caso, infatti, considereremo indistinguibili il gelato pistacchio e vaniglia e il gelato vaniglia e pistacchio.
- Con tre palline, si potranno creare 10 gelati diversi: i 3 gelati con 3 palline dello stesso gusto (VVV, PPP, CCC), i 6 gelati con 2 palline uguali e 1 diversa (VVP, VVC, PPV, PPC, CCP, CCV) e infine il gelato con 3 gusti differenti (VPC).

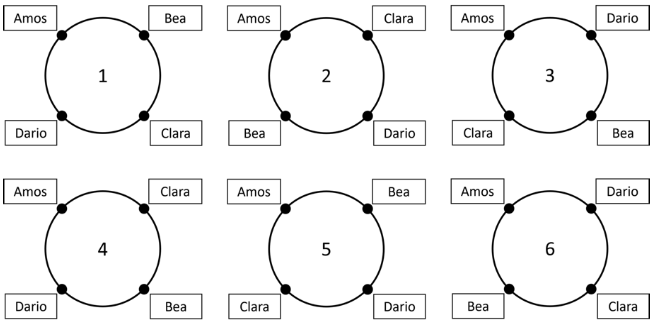
Per esplorare tutti i casi possibili, può essere utile avere a disposizione tanti gelati disegnati con il numero di palline desiderate bianche che possono essere colorate di giallo, verde o marrone, oppure avere a disposizione già pronte delle palline di cartoncino colorate da incollare sui vari coni, fino a che non si saranno rappresentati tutti i casi possibili.

Presentare questo esempio può essere utile per ragionare e discutere sulle situazioni in cui cambiando l'ordine dei gusti, non cambia il gelato risultante.

I posti a tavola

Immaginiamo di avere un tavolo rotondo e 4 commensali invitati a cena. In quanti diversi modi possono disporsi attorno al tavolo? Inizialmente sarà sufficiente ragionare su un numero di invitati esiguo (come in questo caso, 4), ma la situazione può velocemente farsi più complessa se il numero da considerare è maggiore.

Questa situazione può facilmente essere inscenata in classe e può quindi essere eventualmente risolta concretamente, sedendosi più volte attorno a un banco o a un tavolo. Oppure può essere proposta consegnando 4 segnaposto con i nomi dei 4 invitati (ad esempio Amos, Bea, Clara, Dario) e un modellino di tavolo rotondo con 4 posti apparecchiati. Con il proprio corpo o con il materiale a disposizione, i bambini possono esplorare i 3 × 2 × 1 = 6 casi possibili.



In un tavolo rotondo non si distingue il primo dall'ultimo invitato della sequenza: la disposizione Amos, Bea, Clara, Dario è sempre la stessa anche se gli invitati ruotano in senso antiorario (Bea, Clara, Dario, Amos; Clara, Dario, Amos, Bea; Dario, Amos, Bea, Clara). Per questo, negli esempi si è tenuta fissa la posizione di Amos, come se fosse il primo della sequenza, e si è giocato con gli altri posti.

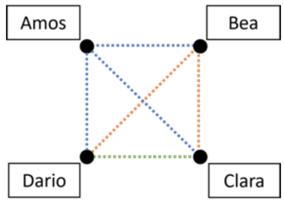
Attenzione: una situazione apparentemente simile ma con risoluzione differente si creerebbe chiedendo di mettere in fila i 4 amici per partecipare a una staffetta di corsa. In quanti modi diversi si possono disporre in fila i 4 amici?

In questo caso, infatti, il primo bambino in fila è ben distinguibile dall'ultimo bambino in fila e la sequenza Amos, Bea, Clara, Dario è ben diversa da Bea, Clara, Dario, Amos. Qui si ha la scelta tra 4 bambini per il primo della fila, 3 scelte per il secondo, 2 per il terzo e ne rimarrà 1 per il quarto: 4 × 3 × 2 × 1 = 24 casi possibili, molti di più!

I diversi brindisi

Questa situazione può collegarsi facilmente alla precedente. Immaginiamo che ogni invitato durante la cena voglia fare un brindisi con tutti gli altri, esattamente una volta. Si tratta di un problema legato all'enumerazione, e se si considera il gruppo nella sua interezza è necessario ragionare su tutte le combinazioni per assicurarsi che nessuna possibilità sia dimenticata o considerata due o più volte. Anche in questo caso la complessità della richiesta aumenta all'aumentare del numero di invitati.

Con i nostri 4 invitati, i brindisi sono 6 e possiamo enumerarli così: Amos fa il brindisi con Bea, Clara e Dario (linee blu nello schema); Bea, che ha già fatto il brindisi con Amos, brinda con Clara e Dario (linee arancioni nello schema); a Clara, che avrà già brindato con Amos e Bea, mancherà solo il brindisi con Dario; e infine Dario si ritroverà ad aver fatto un brindisi con ognuno dei suoi amici, quindi non ne aggiunge nessuno.



Strutturata in questo modo, la risoluzione del problema con n invitati rimanda a determinare la somma dei primi n-1 numeri naturali:

n-1 brindisi per il primo invitato

+ (n-2) brindisi per il secondo invitato

...

+ 1 brindisi per il penultimo invitato

+ 0 brindisi per l'ultimo invitato

ossia $0 + 1 + ... + (n-2) + (n-1) = ((n-1) \times n)/2$ brindisi in totale.

La partita di calcio

Questa situazione può essere proposta il giorno di una partita di calcio o hockey su ghiaccio, come un derby particolarmente sentito. Il docente spiega alla classe di provare a immaginare che durante la suddetta partita, per esempio fra Ambrì e Lugano, in tutto saranno segnate un certo numero di reti, per esempio 6. Pone quindi l'interrogativo agli allievi: con quale risultato potrebbe finire la partita? Gli allievi ragionano sulle diverse possibilità (6 – 0 per l'Ambrì, 5 – 1 per il Lugano ecc.) e provano a descriverle tutte.

È come contare tutte le coppie di due numeri naturali la cui somma è 6, chiaramente distinguendo la coppia 6 – 0 da 0 – 6 perché nel primo caso vince una squadra, nel secondo vince l'altra!

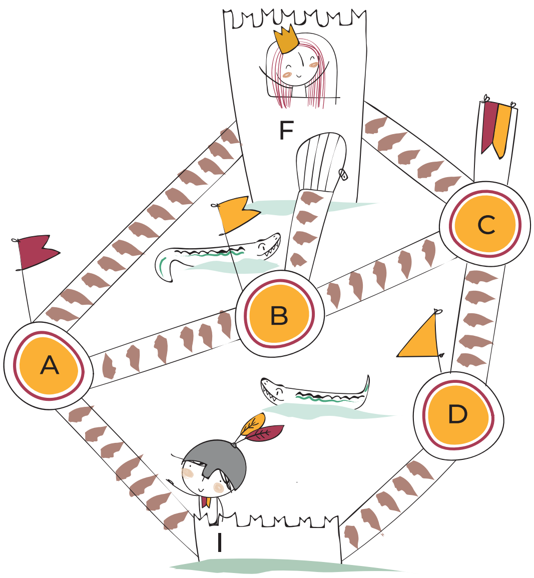
I bambini possono esplorare i 7 casi possibili servendosi di una tabella a due colonne come la seguente.

6 reti segnate	
Ambrì	Lugano
0	6
1	5
2	4
3	3
4	2
5	1
6	0

Percorsi e mappe

Le attività legate ai percorsi e alle mappe possono essere proposte anche all'interno di itinerari didattici sulla combinatoria. È possibile proporre l'attività agli allievi inserendola in un contesto narrativo: i più classici sono quelli legati alle fiabe, come per esempio Cappuccetto Rosso che deve raggiungere la casa della nonna nel bosco, oppure il principe che deve raggiungere la principessa nel castello affrontando insidie e pericoli.

Immaginando di non poter passare due volte per lo stesso tratto di strada, quanti sono i possibili percorsi realizzabili? La situazione può essere rappresentata tramite mappa, oppure può essere vissuta in prima persona creando gincane o percorsi con attrezzi da palestra o altri supporti. Nella mappa rappresentata qui sotto abbiamo chiamato I il punto iniziale e F quello finale del percorso, e indicato con A, B, C, D gli altri punti.



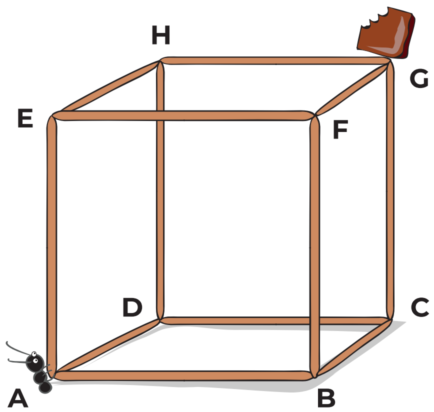
I percorsi possibili per andare da I a F, senza ripassare due volte per lo stesso punto, sono in tutto 6:

- 3 passando da A:
  I – A – F; I – A – B – F; I – A – B – C – F;
- 3 passando da D:
  I – D – C – F; I – D – C – B – F; I – D – C – B – A – F.

Individuare tutti i possibili percorsi in prima persona può essere più difficile rispetto a tracciarli su una mappa, in quanto è più facile padroneggiare l'intera situazione se la si guarda da un punto di vista esterno (microspazio); tuttavia, gli allievi che incontrano più difficoltà nell'interpretare mappe e schemi 2D potrebbero trovare giovamento dall'essere immersi nella situazione stessa. In questo senso può essere interessante riflettere su quali possibili strategie è necessario mettere in atto per tenere traccia dei percorsi già effettuati, in modo da evitare ripetizioni senza dimenticarne nemmeno uno.

I percorsi realizzati possono essere semplificati o resi più complessi modificando l'ordine dei nodi, cioè il numero di strade che si diramano ad ogni snodo del percorso. È possibile aggiungere o togliere dei nuovi tratti di strada, oppure aggiungere dei collegamenti che prima non c'erano: è di conseguenza interessante riflettere sul fatto che questi cambiamenti hanno un impatto anche sul numero di percorsi che è possibile effettuare per raggiungere la meta.

Nell'ambito della geometria 3D, la stessa attività può essere proposta attraverso l'uso di poliedri scheletrati. Immaginiamo di avere una formica che, partendo dal vertice A di un cubo scheletrato, vuole raggiungere un pezzo di cioccolato posto sul vertice opposto G. Dopo aver stabilito che la formica esegue sempre il percorso più corto (ovvero, nel caso del cubo scheletrato, percorre tre spigoli), si chiede agli allievi di trovare tutti i possibili percorsi che conducono l'insetto alla propria meta.

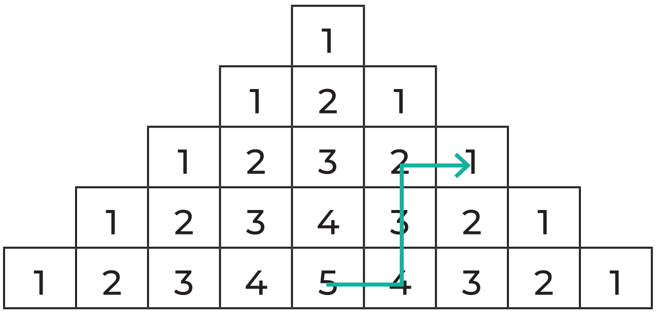


La formica ha in tutto 6 possibilità per andare da A a G percorrendo solo 3 spigoli:

- 2 se si dirige verso B:
  AB – BC – CG e AB – BF – FG;
- 2 se si dirige verso D:
  AD – DH – HG e AD – DC – CG;
- 2 se si dirige verso E:
  AE – EH – HG e AE – EF – FG.

La stessa attività potrà essere svolta anche con altri poliedri conosciuti dagli allievi. Di volta in volta è interessante notare come il numero di percorsi possibili cambia a dipendenza della posizione della formica e del pezzo di cioccolato e soprattutto del tipo di poliedro considerato. Una volta che gli allievi hanno acquisito dimestichezza con l'attività attraverso la manipolazione di modelli e solidi a disposizione, è possibile chiedere loro di ragionare su rappresentazioni grafiche delle figure date su scheda o, in maniera ancora più astratta, immaginando il poliedro nella propria mente.

Un altro tipo di percorso può essere proposto con allievi più grandi anche in contesti astratti, come il seguente schema, dove ogni casella numerica è confinante con almeno un'altra casella in cui si trova il numero precedente o il numero successivo.

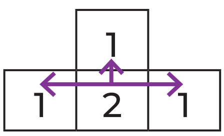


L'obiettivo è quello di collegare i numeri in ordine decrescente a partire dalla casella contenente il numero più alto fino a 1. Nell'esempio qui sopra è indicato un possibile cammino che parte dal numero 5, presente nell'ultima riga, e collega tutti i numeri da 5 a 1. Il problema può essere quindi presentato in questa forma: quanti cammini, consistenti in una successione di segmenti orizzontali e/o verticali, si possono contare nella figura in modo da formare la successione di numeri 5 – 4 – 3 – 2 – 1?

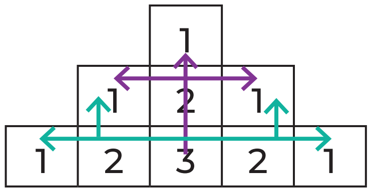
L'attività può essere semplificata considerando un numero inferiore di righe, per esempio tenendo solo le prime tre righe a partire dall'alto: in quel caso l'obiettivo è stabilire quanti cammini permettono di formare la successione di numeri 3 – 2 – 1. Al contrario, l'attività può essere resa più complessa aggiungendo una o ulteriori righe alla figura.

Affinché il docente possa padroneggiare appieno la risoluzione di questo rompicapo (e scegliere poi come e con quale difficoltà presentarlo agli allievi) conviene partire dallo schema più facile e individuare quanti percorsi si possono contare in più, ogni volta che si aggiunge una nuova riga.

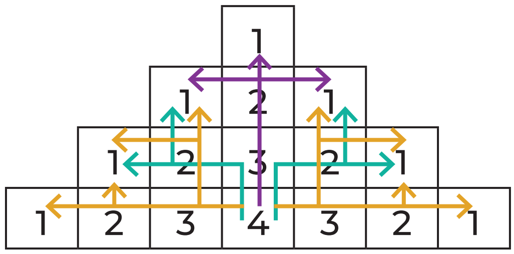
Partendo dallo schema a due righe, ci sono 3 percorsi possibili: 1 verso l'alto e 2 andando verso gli 1 dell'ultima riga.



Se si considera lo schema a tre righe, si aggiungono altri 4 percorsi possibili (in verde), dando origine a 1 + 2 + 4 = 7 possibili percorsi.



Se si aggiunge una quarta riga, a quelli già individuati si aggiungono altri 8 percorsi possibili (in arancione), e si ottengono così 1 + 2 + 4 + 8 = 15 percorsi possibili.



Strutturando in questo modo la ricerca dei percorsi possibili, si può osservare che se si aggiungesse una quinta riga, si aggiungerebbero altri 16 percorsi possibili a quelli già individuati, che corrispondono a $2^4 = 2^{5-1}$, dunque in tutto i percorsi sarebbero 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31.

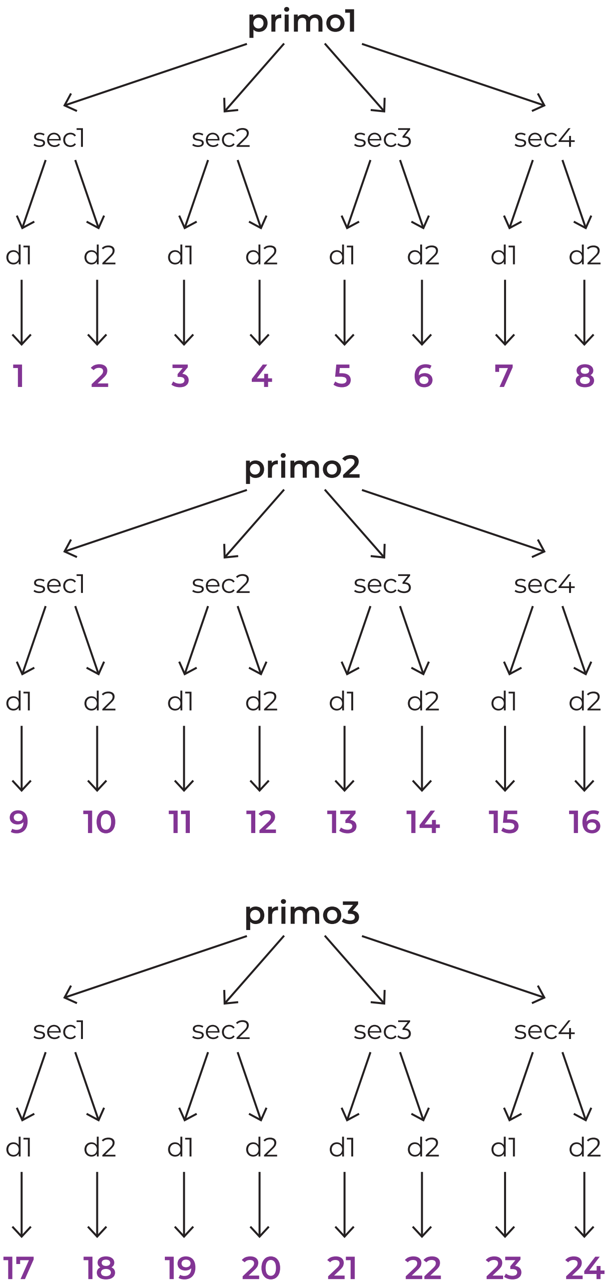
In generale quindi per uno schema di *n* righe, il numero di percorsi possibili per collegare i numeri da *n* fino a 1 è dato dalla somma di tutte le potenze di 2 partendo da $2^0 = 1$ fino a 2^{n-1}. Il numero di percorsi possibili, quindi, aumenta notevolmente all'aumentare del numero di righe.

Anche in questo caso, oltre al momento in cui si affronta il problema, è interessante che il docente preveda una discussione e uno scambio di strategie di enumerazione messe in atto dagli allievi, così da riuscire a considerare tutti i diversi percorsi senza dimenticarne nessuno e senza ripetizioni. Non esiste una strategia migliore in assoluto, ma è possibile mettere l'accento sul fatto che lavorando in maniera metodica e cercando di stabilire una procedura da seguire, il compito può risultare meno complesso.

Il menu e le diverse combinazioni

Quest'attività propone una possibile rappresentazione diversa dalle precedenti per trovare tutte le combinazioni possibili di una situazione: il grafo ad albero. Essendo una rappresentazione astratta di una situazione di incertezza, è più adatta per allievi del secondo ciclo.

Si propone agli allievi di impersonare i clienti di un ristorante che sul menu propone un certo numero di primi, di secondi e di dessert differenti. In analogia alle proposte precedenti, si può chiedere agli allievi di cercare di stabilire se il ristorante può proporre un menu speciale diverso ogni giorno di un certo mese, scegliendo un piatto per ciascuna tipologia di portata. Se per esempio sono indicati 3 primi, 4 secondi, 2 dessert, una rappresentazione utile può essere quella del grafo ad albero seguente.



Questa rappresentazione aiuta a tenere sotto controllo la raffigurazione e il conteggio di tutti i casi possibili, fissando il primo1, variando tutti i secondi e segnalando che per ciascun secondo si può ancora abbinare uno dei due dessert; lo stesso discorso si può fare fissando il primo2, e infine il primo3. In questo caso, i bambini scoprono che non è possibile proporre un menu speciale diverso per 30 giorni di fila. Una discussione interessante può quindi partire da questo stimolo: come cambia la situazione se aggiungessimo un primo, o un secondo o un dessert?

Alcuni allievi penseranno di reiterare parti dello schema (ad esempio, con un primo in più si aggiunge una sezione dell'albero uguale a quella che si dirama da ciascuno degli altri primi, quindi altri 8 casi in più). È anche possibile che gli allievi intravedano la moltiplicazione ($3 \times 4 \times 2$) come operazione che permette di trovare tutti i casi possibili più rapidamente rispetto a raffigurarli e a contarli. Le variazioni proposte danno quindi rispettivamente $4 \times 4 \times 2 = 32$, $3 \times 5 \times 2 = 30$, $3 \times 4 \times 3 = 36$ menu possibili, portando a interessanti discussioni sulle proprietà delle operazioni e sulle strategie di calcolo.

La discussione con gli allievi può infine vertere anche sull'apporto energetico o il bilanciamento di vitamine, proteine e carboidrati di ciascun menu, selezionando i menu più sani o equilibrati.

Anagrammi

Una sfida a metà strada tra la matematica e l'italiano è quella di creare tutte le sequenze possibili a partire da un determinato insieme di lettere. Ad esempio, una prima richiesta può essere di contare quante sequenze di 4 lettere è possibile formare con le seguenti: A, R, O, M, che sono tutte diverse tra loro. Con gli allievi più piccoli si può proporre di usare dei cartellini mobili con le 4 lettere, in modo che possano manipolare il materiale concreto. Con gli allievi più grandi, si può invece sfruttare un grafo ad albero (come quello dell'attività "Il menu e le diverse combinazioni"), fissando ogni volta una lettera di partenza e variando le altre.

Inizialmente si possono cercare tutte le sequenze possibili (che sono $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$):

AROM	ROMA	OMAR	MARO
ARMO	ROAM	OMRA	MAOR
AOMR	RMAO	OARM	MROA
AORM	RMOA	OAMR	MRAO
AMRO	RAMO	ORMA	MORA
AMOR	RAOM	ORAM	MOAR

In seguito, si invitano i bambini a individuare le sequenze di lettere che hanno senso in italiano, come ROMA, RAMO, AMOR. Con una ricerca sul dizionario o su internet, si può approfondire il significato dei vari termini, e si può proporre di provare a individuare, se ce ne sono, le sequenze che in una lingua straniera assumono significato, come ROAM che in inglese significa "vagare".

Anche in questo caso è interessante condividere e confrontare le diverse strategie utilizzate dai bambini per essere sicuri di aver costruito tutte le parole possibili.

Una variante all'attività consiste nell'avere una lettera doppia, quindi chiedere di lavorare ad esempio con le lettere A, R, A, M: come cambia il numero di sequenze di 4 lettere che è possibile realizzare? Sequenze che prima erano ben distinte come ROMA e RAMO ora sono indistinguibili: RAMA e RAMA, quindi contano come una sola. Gli allievi arriveranno a contare che il numero di sequenze possibili risulta la metà di quelle precedenti (12).

Un'ulteriore variante è di dare due coppie di lettere uguali: A, R, A, R. In questo caso, esplorando un po', si trova che il numero di sequenze si dimezza nuovamente rispetto a quelle trovate nella variante precedente, ossia diventano un quarto di quelle che si ottenevano con tutte lettere diverse tra loro (6).

Nel frattempo, dal punto di vista dell'italiano, si incontrano sempre parole nuove da individuare e di cui approfondire il significato, come ARMA oppure RARA.

Una volta che i bambini hanno acquisito dimestichezza con il compito, l'attività può essere proposta a coppie sotto forma di gioco, come una sorta di "scarabeo". Il docente assegna un certo gruppo di lettere e chiede di formare tutte le parole possibili in un certo intervallo di tempo. Le coppie di allievi si sfidano nel tempo stabilito e, al termine, si assegnano i punti: 5 punti per la coppia che ha trovato più sequenze e 1 punto bonus da assegnare ad ogni coppia, per ogni parola trovata di senso compiuto. Le sfide possono essere create in ordine di difficoltà, aumentando il numero di lettere date e/o il numero di ripetizioni di una data lettera, o anche con la ripetizione di più lettere (ad esempio una lettera doppia e una lettera tripla).

Laboratorio di invenzione di storie

Un'altra attività interdisciplinare con l'italiano può essere la proposta di un laboratorio di invenzione di storie. Si scelgono insieme un certo numero di elementi narrativi (ad esempio, 3) che devono assolutamente essere presenti (ad esempio, una certa ambientazione, un dato protagonista e un determinato antagonista) e si propone ai bambini di raccontare (per i più piccoli) o di scrivere (per i più grandi) l'incipit di una storia facendo in modo che gli elementi narrativi scelti appaiano in un ordine ben preciso. Prima di iniziare, si può scoprire insieme quanti modi diversi ci sono per combinare l'ordine degli elementi all'interno della storia.

Se si tratta di 3 elementi – un bosco, una bambina e un lupo –, si avranno 6 possibili storie diverse, a seconda dell'ordine in cui appaiono questi elementi (ovviamente a parità di posizione di elementi, sarà in ogni caso possibile costruire storie diverse). A questo punto, è possibile creare 6 gruppi e chiedere a ciascuno di inventare l'inizio della storia considerando uno dei 6 ordini possibili, avendo cura di inserire delle descrizioni il più possibile personalizzate e dettagliate di ogni elemento.

Infine, si leggono le storie e si discute dell'effetto che può avere sul lettore un certo ordine degli elementi rispetto a un altro; ad esempio, "una bambina che entra in un bosco e incontra un lupo" può suscitare emozioni più serene di "un lupo che segue una bambina in un bosco".

Tori e mucche

Tori e mucche è un gioco di codici segreti da indovinare. Si gioca a coppie. Ognuno dei due avversari sceglie un codice segreto a 4 cifre, tutte diverse fra loro. A questo punto ogni giocatore, a turno, prova a indovinare il codice scelto dall'avversario, procedendo per tentativi. Le indicazioni sulla correttezza o meno del codice sono date in un modo particolare: se il giocatore ha indovinato la cifra giusta del codice al posto giusto, allora tale cifra viene chiamata "toro", se invece è stata indovinata la cifra, ma nel codice occupa il posto sbagliato, allora essa è chiamata "mucca".

Se per esempio il codice da indovinare è 3724 e il giocatore tenta di indovinare con 1320, l'avversario risponde dicendo: "1 toro e 1 mucca" perché la cifra 3 è corretta ma si trova al posto sbagliato (mucca), mentre la cifra 2 è corretta ed è al posto giusto (toro). Se invece il tentativo è 3742, l'avversario deve dire: "2 tori e 2 mucche" e così via. Tentativo dopo tentativo, l'obiettivo del gioco è raccogliere delle indicazioni e ragionare per riuscire a individuare a colpo sicuro la combinazione corretta delle cifre.

Questa attività può essere svolta due contro due: gli allievi della stessa squadra sono così spinti a discutere insieme prima di procedere con il tentativo successivo, ragionando sugli elementi e le indicazioni precedentemente raccolti.

La stessa attività può essere svolta anche utilizzando parole composte da lettere tutte diverse (chiamate anche eterogrammi), stabilendo a priori il numero di lettere della parola da scegliere, per esempio 4. In questo caso i giocatori devono provare a indovinare la parola dell'avversario facendo diverse proposte. Immaginiamo di dover indovinare la parola "FARO" e di proporre come tentativo la parola "LUCE". L'avversario deve rispondere: "0 tori e 0 mucche" perché nessuna lettera è stata indovinata. Se invece il tentativo fosse "RANE", allora l'avversario dovrebbe dire "1 toro e 1 mucca", perché la lettera A è corretta e si trova al posto giusto, mentre la lettera R è corretta ma si trova al posto sbagliato.

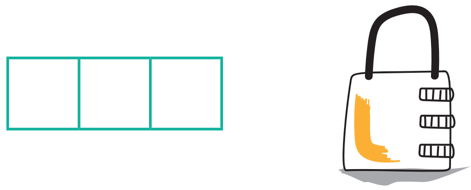
Un'altra celebre variante del gioco che è possibile reperire sul mercato è quella del Mastermind. In questo gioco di società occorre indovinare la combinazione di segnalini colorati scelta dall'avversario procedendo per tentativi. A differenza del gioco "Tori e mucche", però, è possibile utilizzare lo stesso colore più di una volta.

Lucchetti

Un'attività per certi versi simile a quella del gioco "Tori e mucche" riguarda l'uso dei lucchetti. In questo caso è necessario disporre di lucchetti che si aprono quando si inserisce una corretta combinazione di cifre; è opportuno che la combinazione possa essere facilmente cambiata, per poter riprendere e riproporre l'attività più volte.

L'attività può essere introdotta da una narrazione, che può per esempio riguardare la scoperta di un tesoro conservato in una cassa chiusa da diversi lucchetti: leggendo alcuni indizi sarà possibile trovare la combinazione corretta provando fra quelle possibili. Il docente prepara quindi i lucchetti, scrivendo per ognuno su dei biglietti degli indizi che aiutino a stabilire la combinazione corretta. A dipendenza della complessità degli indizi dati e del numero di cifre della combinazione, l'attività può diventare più o meno complessa. Il docente potrebbe per esempio svelare tutte le cifre in ordine casuale e chiedere agli allievi di stabilire ogni possibile combinazione prima di provarle sul lucchetto. Potrebbe al contrario dare degli indizi per capire quali sono le cifre (per esempio "*Sono tutte cifre dispari minori di 4*", oppure "*La somma delle cifre è 10*") senza svelarle a priori, e così via. Quando tutti gli allievi sono riusciti ad aprire il proprio lucchetto, ecco che si svela il tesoro contenuto all'interno della cassa.

- Si tratta di un numero di tre cifre.
- Se sottrai la cifra delle decine da quelle delle unità ottieni 2.
- La cifra delle unità è la metà di quella delle centinaia.
- La cifra delle centinaia corrisponde al numero di lettere del nome di Gabriele.



La stessa attività può essere proposta rendendo gli allievi più attivi anche nella fase di scelta della combinazione e di scrittura degli indizi: in questo caso sono i bambini stessi a preparare i lucchetti e i biglietti per i compagni, sottoponendo di volta in volta nuove sfide e nuove combinazioni da trovare.

Questa attività si presta anche per proporre un problema che ha lo scopo di far ragionare sulla sicurezza dei lucchetti in commercio, per esempio quelli con combinazioni a quattro cifre: se non vengono forniti indizi, quante sono in tutto le possibili combinazioni? In autonomia, in piccoli gruppi o con l'aiuto del docente, gli allievi potranno arrivare a stabilire che le combinazioni sono in tutto 10'000 (0-0-0-0, 0-0-0-1, 0-0-0-2, ..., 9-9-9-9).

Combinazioni possibili con dadi e monete

In questa proposta sono presentati degli spunti per dare agli allievi dei primi esempi di come alcune situazioni di incertezza possano essere utilizzate per uno studio delle diverse combinazioni possibili che danno luogo a un certo evento. Si suggerisce di proporre questo tipo di attività solo dopo aver favorito un avvicinamento alla tematica della probabilità tramite situazioni pratiche e riflessioni mediate (si veda a questo scopo la pratica didattica "Situazioni di incertezza" con attività dalla prima alla quinta elementare).

La prima proposta riguarda una situazione di incertezza per antonomasia, probabilmente vicina al vissuto e alle esperienze degli allievi: il lancio della moneta. Si propone agli allievi l'esito di quattro lanci di una moneta, per esempio: "*Ho lanciato la moneta quattro volte, ho ottenuto due volte testa e due volte croce. Quali posso-*

no essere stati i possibili esiti dei singoli lanci?". Gli allievi ragionano e lavorano autonomamente per trovare tutte le possibili combinazioni in cui si possano aver ottenuto 2 teste e 2 croci. Una possibile rappresentazione è la tabella seguente, in cui T sta per testa e C sta per croce:

	1° lancio	2° lancio	3° lancio	4° lancio
Possibilità 1	T	T	C	C
Possibilità 2	T	C	T	C
Possibilità 3	T	C	C	T
Possibilità 4	C	C	T	T
Possibilità 5	C	T	C	T
Possibilità 6	C	T	T	C

Oltre a stabilire che ci sono in tutto sei possibili combinazioni con 2 teste e 2 croci, è importante chiedere agli allievi di provare a spiegare come hanno ragionato e quale eventuale strategia hanno utilizzato per verificare di aver considerato tutte le possibili combinazioni senza dimenticarne nemmeno una.

Una situazione di incertezza più complessa su cui è possibile lavorare attraverso la combinatoria può riguardare la probabilità di ottenere un certo numero lanciando due dadi da sei facce e addizionando i valori emersi: è più probabile ottenere 12 o 7? Dopo una prima fase di discussione libera, si cerca tutti insieme di stabilire la probabilità di ottenere ciascuna delle diverse somme. Per farlo, è necessario stabilire tutti i possibili esiti del lancio di due dadi, utilizzando per esempio una rappresentazione tabellare. Nella proposta sottostante, nella prima riga sono indicate tutte le possibili somme ottenute dal lancio dei due dadi e nelle righe sottostanti i diversi modi in cui è possibile ottenerle.

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1 1	1 2	2 2	1 4	1 5	1 6	2 6	3 6	4 6	5 6	6 6
	2 1	1 3	4 1	5 1	6 1	6 2	6 3	6 4	6 5	
		3 1	2 3	2 4	2 5	3 5	4 5	5 5		
			3 2	4 2	5 2	5 3	5 4			
				3 3	3 4	4 4				
					4 3					

Per visualizzare gli esiti, è possibile anche utilizzare una tabella a doppia entrata come la seguente:

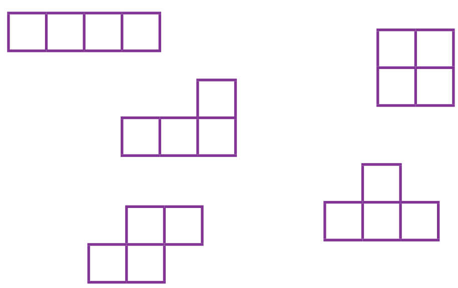
		ESITI DADO 2					
		1	2	3	4	5	6
ESITI DADO 1	1	1 + 1 = 2	1 + 2 = 3	1 + 3 = 4	1 + 4 = 5	1 + 5 = 6	1 + 6 = 7
	2	2 + 1 = 3	2 + 2 = 4	2 + 3 = 5	2 + 4 = 6	2 + 5 = 7	2 + 6 = 8
	3	3 + 1 = 4	3 + 2 = 5	3 + 3 = 6	3 + 4 = 7	3 + 5 = 8	3 + 6 = 9
	4	4 + 1 = 5	4 + 2 = 6	4 + 3 = 7	4 + 4 = 8	4 + 5 = 9	4 + 6 = 10
	5	5 + 1 = 6	5 + 2 = 7	5 + 3 = 8	5 + 4 = 9	5 + 5 = 10	5 + 6 = 11
	6	6 + 1 = 7	6 + 2 = 8	6 + 3 = 9	6 + 4 = 10	6 + 5 = 11	6 + 6 = 12

Analizzando le tabelle ci si può rendere conto che i casi possibili sono in tutto 36. Solo in 1 caso su 36 si ottiene 12, cioè quando entrambi i dadi lanciati mostrano il numero 6. Sono invece ben 6 su 36 i possibili lanci che danno come somma il 7, che dunque risulta più probabile rispetto alle altre somme ottenibili dal lancio di due dadi.

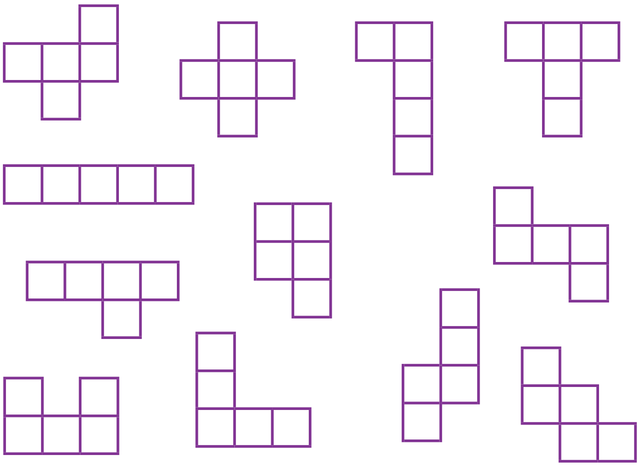
Tetramini, pentamini e combinatoria in geometria

È possibile proporre delle esperienze legate alla combinatoria anche in ambito geometrico, proponendo agli allievi delle sfide legate ai tetramini e ai pentamini.

I tetramini sono delle figure composte da quattro quadrati congruenti accostati in modo che almeno un lato di ogni quadrato coincida con il lato di un altro quadrato, senza che i quadrati si sovrappongano fra loro. Dopo aver chiarito le caratteristiche del tetramino, il docente pone la sfida: "*Quanti tetramini diversi è possibile costruire accostando quattro quadrati?*". Gli allievi possono lavorare individualmente o a piccoli gruppi, con carta e penna o disponendo di materiale manipolabile, come per esempio cartoncini di forma quadrata. La caccia ai tetramini può svolgersi in un tempo determinato ("*Chi riesce a trovare più tetramini diversi in 15 minuti?*"), oppure fino a che non sono state trovate tutte le combinazioni possibili. Il docente può tenere traccia dei progressi degli allievi segnando alla lavagna o su un cartellone i nuovi tetramini individuati di volta in volta. In tutto i diversi tetramini sono cinque, non vanno ovviamente considerati le disposizioni diverse dello stesso tetramino.



La stessa attività può diventare più complessa se si lancia la sfida della caccia a tutti i diversi pentamini (figure cioè che si ottengono accostando cinque quadrati, facendo in modo che almeno un lato di ciascuno coincida con un lato di un altro senza che i quadrati si sovrappongano). In questo caso le possibili combinazioni sono in tutto dodici.



Anche in questo caso è utile aprire una discussione con gli allievi per verbalizzare e mettere in comune le diverse strategie utilizzate per individuare tutti i tipi di tetramini o pentamini. Tali riflessioni potranno richiamare anche i concetti di isometria, in particolare di simmetria e di rotazione, in quanto la figura (tetramino o pentamino) è sempre la stessa anche se ruotata o simmetrica.

TRAGUARDI DI COMPETENZA PREVALENTI (I CICLO)

L'allievo:

- conosce e utilizza i numeri naturali almeno fino a 100 in contesti legati principalmente al quotidiano e sa effettuare ordinamenti, stime, conteggi di raccolte alla sua portata numerica;
- riconosce, denomina e descrive le più comuni figure del piano e dello spazio, oltre a semplici relazioni e strutture legate alla lettura della realtà che lo circonda;
- esplora, comprende, prova e risolve situazioni-problema contestualizzate legate al vissuto e alla realtà che coinvolgono i primi apprendimenti in ambito numerico, geometrico e relativi a grandezze riferite alla sua quotidianità;
- progetta e realizza rappresentazioni e modelli non formalizzati legati all'interpretazione matematica del mondo che lo circonda;
- presenta, descrive e motiva le proprie scelte prese per affrontare una semplice situazione matematica legata alla realtà in modo tale che risultino comprensibili ai compagni, come pure comprende le descrizioni e presentazioni degli altri;
- manifesta un atteggiamento positivo rispetto all'apprendimento quando si affrontano esperienze relative alla matematica.

TRAGUARDI DI COMPETENZA PREVALENTI (II CICLO)

L'allievo:

- conosce e utilizza i numeri naturali, i numeri decimali e le frazioni in contesti reali e ideali; sa ordinare i numeri naturali e decimali;
- ricava e interpreta informazioni da tabelle e grafici; elabora, interpreta e rappresenta insiemi di dati forniti o ricercati;
- esprime valutazioni probabilistiche in alcune semplici situazioni di incertezza legate al vissuto;
- riconosce, denomina, descrive e rappresenta figure (del piano e dello spazio), relazioni e strutture legate all'interpretazione della realtà o a una loro matematizzazione e modellizzazione;
- comprende e risolve con fiducia e determinazione situazioni-problema in tutti gli ambiti di contenuto previsti per questo ciclo, legate al concreto o astratte ma partendo da situazioni reali, mantenendo il controllo critico sia sui processi risolutivi sia sui risultati, esplorando e provando diverse strade risolutive;
- costruisce ragionamenti, fondandosi su ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista di altri;
- progetta e realizza rappresentazioni e modelli di vario tipo, matematizzando e modellizzando situazioni reali impregnate di senso;
- riconosce e utilizza rappresentazioni diverse di uno stesso oggetto matematico;
- comunica e argomenta procedimenti e soluzioni relative a una situazione, utilizzando diversi registri di rappresentazione semiotica; comprende, valuta e prende in considerazione la bontà di argomentazioni legate a scelte o processi risolutivi diversi dai propri;
- manifesta un atteggiamento positivo rispetto alla matematica, tramite esperienze significative che gli permettano di cogliere in che misura gli strumenti matematici che ha imparato a utilizzare siano utili per operare nella realtà.

COLLEGAMENTI CON ALTRE DISCIPLINE

Area lingue

Area motricità

COMPETENZE TRASVERSALI

- Pensiero riflessivo e critico (ricerca delle connessioni, interpretazione/giudizio, considerazione risorse e vincoli).
- Pensiero creativo e problem solving (messa a fuoco del problema, formulazione di ipotesi, attivazione strategie risolutive, autoregolazione, atteggiamento positivo).

CONTESTI DI FORMAZIONE GENERALE

Biosfera, salute e benessere.